ANALELE UNIVERSITATII BUCURESTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XXII — Nr. 1 — 1973

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ—MECANICĂ

Anul XXII — nr. 1 — 1973

MATEMATICĂ—MECANICĂ

REDACŢIA
ANALELE UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
Şoseaua Panduri Nr. 90
Telefon 31 40 00/131

SUMAR

VARIATIONAL INEQUALITIES AND FIXED POINT THEOREMS FOR NON EXPANSIVE OPERATORS

V. BONTAŞ

1. PRELIMINARY RESULTS

Let X be a real Banach space and X* be its strong dual.

Definition 1.1. The map A: X → X* is called monotone if

$$(Au - Av,\ u - v) \geqslant 0 \qquad \text{for all } u,\ v \in X.$$

The map A will be called strictly monotone if moreover

$$(Au - Av,\ u - v) = 0 \qquad \text{iff } u = v.$$

Definition 1.2. The map $A: D(A) \subset X \to X^*$, with the domain $D(A)$ convex, is called hemicontinuous if, for all $u,\ v \in D(A)$ the function

$$t \in [0,\ 1] \to (A(tu + (1 - t)v),\ u - v) \text{ is continuous.}$$

Theorem 1.1. (Eberlein-Shmulyan). The Banach space X is reflexive iff every strongly bounded sequence of X contains a subsequence which converges weakly to an element of X.

Let X be a reflexive, real Banach space

Theorem 1.2. Let $A: X \to X^*$ be a monotone and hemicontinuous operator and let $k \subset X$ be a closed, convex and bounded set. Then there is $u_0 \in k$ such that

$$(Au_0,\ v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k.$$

Theorem 1.3. Let $k \subset X$ be a closed, convex set, $0 \in k$, and let $A: X \to X^*$ be a monotone, hemicontinuous operator with the following property:

$$(Au,\ u)/\|u\| \to +\infty \text{ for } \|v\| \to \infty \qquad \text{and } v \in k.$$

Then there is $u_0 \in k$, $(Au_0,\ v - u_0) \geqslant 0$ for all $v \in k$.

Theorem 1.4. Let $k \subset X$ be a closed, convex set, let $A: X \to X^*$ be a monotone, hemicontinuous operator and there is $\varphi_0 \in k$ such that

$$\frac{(Av_0 - A\varphi_0,\ v - \varphi_0)}{\|v - \varphi_0\|} \to \infty \text{ for } \|v\| \to \infty \text{ and } v \in k.$$

Then there is $u_0 \in k$ such that $(Au_0,\ v - u_0) \geqslant o$ for all $v \in k$.

Proposition 1.1. Let $k \subset X$ a convex, closed set and let $A: X \to X^*$ be a strictly monotone operator. Then, if there is $u_0 \in k$ for which

$$(Au_0, v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k,$$

this u_0 is unique.

Proposition 1.2. Let $A: X \to X^*$ be a monotone, hemicontinuous operator and $k \subset X$ be a convex, closed set. Then there is

$$u_0 \in k, \ (Au_0, v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k,$$

iff there is

$$u_0 \in k, \ (Av, v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k.$$

Proposition 1.3. Let $A: X \to X^*$ be a monotone hemicontinuous operator and $k \subset X$ be a convex, closed set. Then:

$$\chi = \{u \in k \mid (Au, v - u) \geqslant 0, \ \forall v \in k\}$$

is closed and convex.

Proposition 1.4. Let V a real Hilbert space, $k \subset V$ be a closed, convex set and $f \in V$. Then $u \in k$ is the projection of f onto k iff

$$(u, v - u) \geqslant (f, u - v) \qquad \text{for all } v \in k.$$

Theorem 1.5. Let V be a real Hilbert space and $k \subset V$ be a closed, convex and bounded set. Let $U: k \to V$ be a non expansive operator (that is $\|Uu - Uv\| \leqslant \|u - v\|$ for all $u, v \in k$) such that $U(\partial k) \subset k$. Then there is a fixed point for U in k.

2. A VARIANT FOR THEOREM OF F.E. BROWDER

Theorem 2.1. Let X be a reflexive, real Banach space and X^* be its strong dual.

Let A, B be two maps: $X \to X^*$ and let $k \subset X$ be a convex, closed set. Suppose A monotone and hemicontinuous. Let χ given by

$$\chi = \{u \in k \mid (Au, v - u) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k\}.$$

Assume that $\chi \neq \emptyset$.

Let B be continuous and having the property

$$(Bu - Bv, u - v) \geqslant c_1(\|u - v\|) \, \|u - v\|, \text{ for all } u, v \in \chi \tag{1}$$

where $c_1: [0, \infty) \to [0, \infty)$ is a continuous, monotone map, $c_1(0) = 0$, $c_1(r) > 0$ for $r > 0$ and $c_1(t) \to \infty$ for $r \to \infty$.

For $\varepsilon \in R_+$ let us now define:

$$T_\varepsilon = A + \varepsilon B : X \to X^* \tag{2}$$

and suppose that

$$(T_\varepsilon u - T_\varepsilon v,\ u - v) \geqslant \varphi(\varepsilon)\, c_2(\|u - v\|)\, \|u - v\| \text{ for all } u, v \in k \tag{3}$$

where c_2 is a map like c_1 and $\varphi : [0, \infty) \to [0, \propto)$ has the following property: $\varphi(\varepsilon)/\varepsilon > m \geqslant 0$for all $\varepsilon > 0$.

Let $u_\varepsilon \in k$ be the unique solution of

$$(T_\varepsilon u_\varepsilon,\ v - u_\varepsilon) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k. \tag{4}$$

Then there is $u_0 \in \chi$ such that $u_0 \to u_0$ strongly in X for $\varepsilon \to 0$ and

$$(Bu_0,\ v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in X. \tag{5}$$

Observation 2.1. From the proposition (1.3) it follows that X is a closed, convex set.

2.2. There is $u_\varepsilon \in k$ for which we have (3) since T has the properties required in the theorem (1.4). Moreover T_ε is a strictly monotone operator and then, owing to the proposition (1.1.), u_ε is the unique solution of (3).

2.3. It will be sufficient to prove the theorem (2.1) for all $\varepsilon \geqslant 0$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proof. I. Let u_1 be an element of $\chi \neq \emptyset$. We have

$$\varphi(\varepsilon)\, c_2(\|u_\varepsilon - u_1\|)\, \|u_\varepsilon - u_1\| \leqslant (T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon u_1,\ u_\varepsilon - u_1, \leqslant T_\varepsilon u_1, u_1 -$$

$$- u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon(Bu_1,\ u_1 - u_\varepsilon)$$

Then

$$0 \leqslant mc_2(\|u_\varepsilon - u_1\|)\, \|u_\varepsilon - u_1\| \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} c_2(\|u_\varepsilon - u_1)\|\, \|u_\varepsilon - u_1\| \leqslant Bu_1, u_1 - u_\varepsilon) \tag{6}$$

At last

$$0 \leqslant mc_2(\|u_\varepsilon - u_1\|) \leqslant \|Bu_1\|_{X^*}. \tag{7}$$

It follows that $\{u_\varepsilon - u_1\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+}$ is bounded, otherwise there be $\varepsilon_n \in \mathbf{R}$ with $\|u_{\varepsilon_n} - u_1\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ and then $c_2(\|u_{\varepsilon_n} - u_1\|) \xrightarrow[n\to\infty]{} + \infty$ which contradicts (7). Hence $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$is bounded.

Suppose now $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. We denote by u the solution u_{ε_n} of (4) and then, owing to the theorem (1.1), there is $\{u_{n_i}\}_i \subset \{u_n\}_n$ a weakly convergent subsequence, $u_{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{w} \omega \in X$.

II. Owing to the proposition (1.2) we can write

$$(T_{\varepsilon_{n_i}} v, v - u_{n_i}) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k.$$

Then $(Av, v - u_{n_i}) + \varepsilon_{n_i}(Bv, v - u_{n_i}) \geqslant 0$ for all $v \in k$
Since $\{u_{n_i}\}_i$ is bounded we get

$$(Av, v - \omega) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in k.$$

It follows from the proposition (1.2) that $\omega \in \chi$.

III. We can write (6) for $\omega \in X$,

$$0 \leqslant mc_2(\|u_{n_i} - \omega\|)\, \|u_{n_i} - \omega\| \leqslant (B\omega, \omega - u_{n_i}).$$

For $i \to \infty$ it follows that

$$c_2(\|u_{n_i} - \omega\|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{8}$$

Let $a_i = \|u_{n_i} - \omega\| \geqslant 0$, This sequence donverges to o, since otherwise we could find $a_{i_m} \geqslant \varepsilon_0 > 0$ and, this subsequence being bounded, we could find $a_{i_{m_j}} \to a > 0$ and then $c_2(a_{i_{m_j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} c_2(a) > 0$ which contradicts (8).

IV. We apply the theorem (1.4) for $B\colon X \to X^*$ and $\chi \subset X$, convex and closed owing to the observation (2.1). Then there is

$$u_0 \in \chi,\ (Bu_0, v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in \chi \tag{9}$$

and u_0 *is* unique.

Let us take now u_0, $\omega \in \chi$. From (1) we can write

$$0 \leqslant c_1(\|\omega - u_0\|)\, \|\omega - u_0\| \leqslant (B\omega - Bu_0, \omega - u_0). \tag{10}$$

Proposition 2.1. For all $v \in \chi$ we have

$$(Bu_{n_i}, u_{n_i} - v) \leqslant 0.$$

Proof. The ineguality

$$(T_{\varepsilon_{n_i}} u_{n_i}, v - u_{n_i}) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in \chi \subset k,$$

can be written

$$(Au_{n_i}, v - u_{n_i}) + \varepsilon_{n_i}(Bu_{n_i}, v - u_{n_i}) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in \chi. \tag{11}$$

Since $v \in \chi$ and $u_{n_i} \in k$, we have

$$(Av, u_{n_i} - v_0) \geqslant 0. \tag{12}$$

We add (11) and (12) and then

$$\varepsilon_{n_i}(Bu_{n_i},\ v - u_{n_i}) \geqslant (Av - Au_{n_i},\ v - u_{n_i}) \geqslant 0, \text{ q.e.d.}$$

Proposition 2.2. For all $v \in \chi$ we have

$$(B\omega,\ \omega - v) = \lim_{i\to\infty}(Bu_{n_i},\ u_{n_i} - v).$$

PROOF. Indeed $(B\omega,\ \omega - v) = \lim\limits_{i\to\infty}\ (Bu_{n_i},\ u_{n_i} - v) = \lim\limits_{i\to\infty}\ (Bu_{n_i},\ \omega - u_{n_i}) + \lim\limits_{i\to\infty}\ (Bu_{n_i},\ u_{n_i} - v) = \lim\limits_{i\to 8}\ (Bu_{n_i},\ u_{n_i} - v)$, since $|(Bu_{n_i},\ \omega - u_{n_i})| \leqslant \leqslant \|Bu_{n_i}\|_{X^*}\|\omega - u_{n_i}\|$ and B is continuous.

Owing to the proposition (2.1) and (2.2) we have

$$(B\omega,\ \omega - v) \leqslant 0 \qquad \text{for all } v \in \chi.$$

It follows that

$$(B\omega,\ \omega - u_0) = \leqslant 0 \tag{13}$$

Owing to (9) we have

$$(Bu_0,\ \omega - u_0) \geqslant 0 \tag{14}$$

From (13) and (14) we get

$$(B\omega - Bu_0,\ \omega - u_0) \leqslant 0$$

and it follows from (10) that $\omega = u_0$.

V. We can prove now that $u_n \to u_0$ strongly for $n \to \infty$. Indeed, suppose $u_n \not\to u_0$ for $n \to \infty$. There is $V \in \partial_{u_0}$ for which we can find $\{u_{n_i}\}_i \subset \chi - V$. But $\{u_{n_i}\}$ is bounded so that, owing to the theorem (1.1), there is $u_{n_{i_m}} \to \omega$ weakly for $m \to \infty$. We can reiterate II, III and IV and we get

$$u_{n_{i_m}} \to u_0 \text{ strongly for } m \to \infty,$$

so that there is $m_0 \in N$ with $\{u_{n_{i_m}}\} \subset V$, a contradiction.

Thus we have proved the theorem (2.1.)

3. APPLICATION

Let V be a real Hilbert space, $k \subset V$ be a convex, closed set and $U: V \to V$ a non expansive operator with the following properties:

i) $U(k) \subset k$ (15)

ii) $(Uu,\ u)/\|u\|$ has finite limit when $\|u\| \to \infty$. (16)

Suppose $0 \in k$. Let $W: V \to V$ be a contraction; that is

$$0 \leqslant \alpha < 1, \ \|Wu - Wv\| \leqslant \alpha \|u - v\| \qquad \text{for all } u, v \in V \tag{17}$$

and, moreover,

$$W(k) \subset k \tag{18}$$

The, for $\varepsilon \in (0, 1)$, the operator $U_\varepsilon = (1 - \varepsilon)U + \varepsilon W: V \to V$ has the properties:

$$i) \ U_\varepsilon \text{ is a contraction} \tag{19}$$

$$ii) \ U_\varepsilon(k) \subset k \tag{20}$$

Indeed, $\|U_\varepsilon u - U_\varepsilon v\| \leqslant (1 - \varepsilon(1 - \alpha)) \|u - v\|$ for all $u, v \in V$ and (20) is immediately since k is convex and (15), (18).

Let us denote now T and T_ε by

$$T = I - U : V \to V$$

$$T_\varepsilon = I - U_\varepsilon : V \to V$$

For all $u, v \in V$ we get (21)

$$\text{and } (T_\varepsilon u - T_\varepsilon v, \ u - v) \geqslant \varepsilon(1 - \alpha) \|u - v\|^2. \tag{22}$$

Let χ be given by $\chi = \{u \in k \,|\, (Tu, \ v - u) \geqslant 0, \ \forall v \in k\}$. (23)
We can prove that:

$$i) \ \chi = \{u_0 \in k \,|\, Uu_0 = u_0\}, \tag{24}$$

$$ii) \ \chi \neq \emptyset \tag{25}$$

Indeed, let $u_0 \in \chi$ be arbitrarily. Then $(Tu_0, \ v - u_0) \geqslant 0, \ \forall \ v \in k$.
For $v = Uu_0 \in U(\chi) \subset U(k) \subset k$ we have:

$$(u_0 - Uu_0, \ Uu_0 - u_0) \geqslant 0,$$

hence

$$- \|u_0 - Uu_0\| = 0,$$

that is

$$Uu_0 = u_0.$$

Reciprocally, if $u_0 = Uu_0$ then $Tu_0 = 0$ and $u_0 \in \chi$.
For (25) we can appoly the theorem (1.3), using (21), the hemicontinuity of T (in fact the continuity) and the property:

$$(Tv, \ v)/\|v\| \to \infty \text{ for } \|v\| \to \infty, \qquad v \in k. \tag{26}$$

Indeed, $(Tv, \ v)/\|v\| = \|v\| - (Uv, \ v)/\|v\|$ and (16) proves (26).

Remark (3.1). If k is convex, closed and bounded $\subset V$, (16) is immediatly verified, therefore U, a non expansive operator with $U(k) \subset k$, has at least a fixed point in k, using the theorem (1.2) and (24). The same result is verified with the theorem (1.5). We will write $T_\varepsilon = I - U_\varepsilon = I - U + \varepsilon(U - W) = T + \varepsilon B$, where $B = U - W$.

(*) The operators T and B have the properties required to the hypothesis of the theorem (2.1). In fact, the proposition (3.1), the continuity of B and the following inequality:

$$(Bu - Bv,\ u - v) = \|u - v\|^2 - (Wu - Wv,\ u - v) \geqslant (1 - \alpha)\,\|u - v\|^2,\ \forall u,\quad v \in \chi$$

prove the assertion (*) with $c_1(r) = c_2(r) = (1 - \alpha)r$ and $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

It is immediately that $U_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$, since we can reiterate the proof of (24)

Let $\varepsilon_n > 0$ be a sequence which converges to 0. Let us denote u_{ε_n} by u_n and so we know that u_n are fixed points for the contractions U_{ε_n}. The theorem (2.1) proves that $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$ strongly, $u_0 \in \chi$, and $(Bu_0,\ v - u_0) \geqslant 0$ for all $v \in \chi$ or

$$(u_0 - Wu_0,\ v - u_0) \geqslant 0 \qquad \text{for all } v \in \chi \tag{27}$$

This result is useful since u_n, as fixed points of the contractions U_{ε_n}, can be obtained by an iterative method. Thus u_0 is the limit of the sequenc u_n, therefore we have an algorithm for the approximation of a fixed point for non expansive operators in realHilbert spaces.

Observations. Let $W: V \to V$ be the following map

$$Wu = v_0 \qquad \text{for all } u \in V,$$

where $v_0 \in k$, fixed.

Let $u_0 \in k$ be the fixed point given for U by the previous considerations with this distinct choice of W. Using (27) we get

$$(u_0,\ v - u_0) \geqslant (v_0,\ v - u_0) \qquad \text{for all } v \in \chi.$$

so that, using the proposition (1.4), it is clearly that

$$u_0 = Pr_k v_0$$

therefore, u_0 is the nearest fixed point (for U) to v_0.

COMMENTS

The result presented in 3. is stated in [1.*c*] for a closed convex, bounded subset of X. The proof suggested by F.E. BROWDER requires to a theorem of the same work, theorem that, claims, the in acception given here, that B is a strictly monotone operator on the all X space.

But in 3. this thing doesn't happen in a compulsory manner, and we had to prove a variant of the theorem of F.E. BROWDER in which the result stated in 3. to be recognized like application.

The definition (1.1) and (1.2) are assumed after [2] from [4] and [1.a]. The theorem (1.1) is cited after [5]. The proofs of the theorems (1.2), (1.4) and (1.4) find in [3] and [1.*b*]. The proposition (1.2) was proved by MINTY, while the propositions (1.1), (1.3) and (1.4) have immediate proofs.

The theorem (1.5) is proved in [2] and appears [1.a].

REFERENCES

1. BROWDER, F.E.,: a) Les problémes non-linéaires. Les Presses de l'Universite de Montreal, 1964.
b) Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces, Bull.Am.Math.Soc.71, 1966, 780 — 785.
c) Existence and approximation of solutions of non linear variational inequalities, Proc.Nat.Acad.Sc.U.S.56, 1966, 1080— — 1086.

2. DINCA, G.,; Operatori moxotoni în teoria plasticităţii, Ed.Acad.R.S.R.,1972.

3. HARTMAN, P. STAMPACCHIA,G., On some nonlinear elliptic differential — functional equations, Acta Math. 115, 1966, 271—310.

4. MINTY, J.G.,: Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces. Duke Math. J 29, 1962, 341—3â6.

5. YOSIDA,K., Functional analysis, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — — New-York, 1966.

Received on October 20, 1972;

Faculty of Mathematics and Mechanics. Bucharest.

O TEOREMĂ DE TIP BERFSTEIN VON MISES PENTRU SISTEME ALEATOARE CU LEGĂTURI COMPLETE

MARIANA CRAIU

Fie $(X, \mathcal{F})$ şi (W, v) 2 spaţii măsurabile şi $\{u(., x)\ x \in X\}$ o mulţime de aplicaţii ale lui W în el însuşi.
Să notăm

$$u(\cdot, x^{(n)}) = u(., x_n) \circ \ldots \circ u(\cdot, x_1)$$

Fie P o funcţie definită pe $W \times \mathcal{F}$ astfel încît pe:tru $c \in W$, $P(c, .)$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}$ şi pentru $A \in \mathcal{F}$, $P(., A)$ este o funcţie v măsurabilă şi mărginită.

În [5] se arată că familia de aplicaţii $\{u(., x), x \in X\}$ şi funcţia P defineşte un sistem aleator omogen cu legături complete.

Pentru orice $c \in W$ există un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{X}, \mathcal{P}_c\}$ şi un şir $(\xi_n)_{n \in N^*}$ de variabile aleatoare definite pe Ω şi cu valori în X pentru care

$$\mathcal{P}_c(\xi_1 \in A) = P(c, A)$$

$\mathcal{P}_c(\xi_{n+1} \in A \mid \xi_j = x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n) = P(u(c, x^{(n)}), A)$, $n \in N^*$ cu $x^{(n)} \in X^{(n)}$ şi $A \in \mathcal{F}$

Pentru orice $l \in N^*$ fie $P_{1,l}$ funcţia definită pe $W \times F^{(l)}$ prin relaţiile:

$$P_{1,l} = P \text{ dacă } l = 1$$

şi

$$P_{1,l}(c, A^{(l)}) = \int_X P(c, dx_1) \int_X \ldots \int_X P(u(c, x^{(l-1)}) dx_l)\ \chi_{(A)}^{(x_1, \ldots, x_l)}$$

unde $\chi_{A(l)}$ este indicatorul mulţimii A

Pentru 1, $n \in N^{**}$ fie $P_{1,l}^{(n)}$ funcţia definită pe $X \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relaţiile:

$$P_{1,l}^{(n)} = P_{1,l} \qquad \text{dacă } n = 1$$

$$P_{1,l}^{(n)}(c, A^{(l)}) = \int_x P(c, dx) P_{1,l}^{(n-1)}(u(c, x), A^{(l)}),\ n > 1$$

În aceste condiţii din [4] rezultă că există o probabilitate $\mathcal{P}^{\infty}_{1,l}$ pe $F^{(l)}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{1,l}(c, A^{(l)}) = P^{\infty}_{1,l}(A^{(l)})$$

uniform în raport cu $c \in W$, $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

Vom presupune în cele ce urmează urmînd [1] că este verificată următoare condiţie de ergodicitate uniformă:

C_1: Există probabilităţile $P_l^{-\infty}$ pe $v \times \mathcal{F}^{(l)}$ astfel încît pentru $V \times \times A^{(l)} \in v \times \mathcal{F}^{(l)}$.

$$\lim_{n\to\infty} P^{(0,1)}_{1,n+l}(c, u_c^{-(n-1)}(v) \times A^{(l)}) = P_l^{\infty}(V \times A^{(l)}).$$

uniform în raport cu $V \in v$ şi $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$

Pentru o funcţie reală f, $v \times \mathcal{F}$ măsurabilă şi mărginită fie

$$\overline{M}^{\infty}(f) = \int_{W\times X} f(c, x)\, \overline{P}_1^{\infty}(dc \times dx)$$

În aceste condiţii are loc

Teorema 01. [1] Dacă condiţia C_1 este verificată, şi, dacă $\overline{M}^{\infty}$ (f) există pentru orice $c \in W$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(u(c, x^{(j=1)}), x_j) = \overline{M}^{\infty}(f) \tag{1}$$

Să considerăm cazul în care aceste probabilităţi depind de un parametru $\theta \in \Theta$

Vom presupune verificate următoarele condiţii:

C_2 : Există o măsură μ mărginită pe $\mathcal{F}$ astfel încît $P(c, ., \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq R$ este absolut continuă în raport cu μ iar derivata sa Radon Nikodym $p(c, x, \theta) = \frac{dP(c, . ;\theta)}{d\mu(.)}$ este mărginită şi strict pozitivă pentru orice $\theta \in \Theta$

C_3. Pentru orice $c \in W$, $\theta \in \Theta$, derivatele parţiale $\frac{\partial^k p(c, x, \theta)}{\partial \theta^k}$, $(k = 1, 2, 3)$ există, sînt continue şi nenule.

Funcţia de verosimilitate a procesului este:

$$L^{(n)}(\theta, \omega) = \prod_{j=1}^{n} p(u(c; x^{(j-1)}), x_j, \theta)$$

şi reprezintă densitatea de probabilitate (în raport cu μ) ca în intervalul de timp $[1, \dots n]$ să fie obţinute valorile $(x_1, \dots, x_n) \in X^{(n)}$.

Teorema 02 [1] În condițiile C_1, C_2, C_3 s-a arătat că variabila aleatoare.

$$\{\sqrt{n}(\theta_n^*(\omega) - \theta_0)\},\ n \in N^* \tag{2}$$

unde $\theta_n^*(\omega)$ este soluția ecuației de maximă verosimilitate,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L^{(n)}(\theta, \omega) = 0$$

converge în repartiție către o variabilă normală cu media zero și dispersia σ^2 finită.

Teorema 03. Pentru orice $c \in W$, în condițiile C_1, C_2, C_3 au loc relațiile:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln L^{(n)}(\theta_0, \omega) = 0 \text{ aproape sigur.}$$

$$\text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L^{(n)}(\theta_0, \omega) = -\int_{W\times X} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} p(c, x; \theta_0)\right]^2}{p(c, x; \theta_0)} \mu(dx)\, \nu(dc)$$

aproape sigur.

În scopul generalitării teoremei Bernestein — vom Mises pentru sistemele cu legături complete presupunem verificate următoarele condiții:

K_1. Spațiul parametrilor Θ este un interval deschis al dreptei reale. Λ este o măsură de probabilitate dată apriori pe (Θ, Γ) unde Γ este σ — cîmpul de submulțimi boreliene ale lui Θ. Λ are o densitate λ în raport cu măsura Lebesgue.

K_2. Pentru orice $\theta \in \Theta$ există $\eta(\theta) > 0$ astfel ca

$$\overline{M}^{\infty}\left[\sup_{|\theta-\theta_0|<\eta(\theta)} \frac{\partial^2 \ln p(c, x, \theta)}{\partial\theta^2}\right] < \infty$$

K_3. Oricare ar fi $\theta \in \Theta$ și oricare ar fi $\varepsilon > 0$

$$\overline{M}^{\infty}\left\{\sup_{|\theta-\theta_0|>\varepsilon}\left(\frac{\partial \ln p(c, x; \theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial \ln p(c, x; \theta_0)}{\partial\theta}\right)\right\} < 0$$

și finită pentru orice $\theta \in \Theta$

K_4. Fie

$$i(\theta) = -\overline{M}_{\theta}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 \ln p(c, x; \theta)}{\partial\theta^2}\right) = \int_{W\times X} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} p(c, x; \theta)\right]^2}{p(c, x; \theta)} \mu(dx)\, \nu(dc)$$

finită, continuă și nenulă pentru $\theta \in \Theta$

K_5. Fie K o funcție măsurabilă nenegativă care satisface condițiile: Există $0 < \varepsilon < i(\theta_0)$ astfel încît

$$M(\theta_0) = \sqrt{\frac{i(\theta)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) \exp - \frac{(i(\theta) - \varepsilon)t^2}{2}\, dt$$

este finit.

K_6. Pentru orice $h > 0$ și $\delta > 0$

$$e^{-\delta_n}\int_{|t|>h} K(t\sqrt{n})\,\lambda\,(\hat{\theta}_n + t)\,dt \to 0 \text{ aproape sigur,}$$

unde $\check{\theta}_n$ este estimația de maximă verosimilitate.

K_7: Densitatea λ este continuă și pozitivă într-o vecinătate a lui θ_0.

Să notăm cu $f_n(\theta \mid x_0, \ldots, x_n)$ densitatea aposteriori de repartiție a variabilei θ bazată pe observațiile $x_0, \ldots, x_n$, efectuate asupra procesului.

Fie $f_n^*(t \mid x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} f_n(\theta \mid x_0, \ldots, x_n)$

În ipotezele C_1, C_2, C_3 și $K_1 - K_7$ are loc

Teorema

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\left|f_n^*(t \mid x_0, \ldots, x_n) - \sqrt{\frac{i(\theta)}{2\pi}}\exp\left(-\frac{i(\theta)t^2}{2}\right)\right| dt = 0 \tag{4}$$

aproape sigur.

Demonstrație.

Fie

$$\nu_n(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\ln p\left((u(c, x^{(i-1)})\,x_i, \hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n)\right]\right\} \tag{5}$$

și

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_n(t)\,\lambda\left(\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt$$

Astfel

$$f_n^*(t \mid x_0, \ldots, x_n) = \frac{\nu_n(t)\,\lambda\left(\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{C_n}$$

La fel ca în [3] vom arăta că au loc următoarele rezultate ce vor folosi în demonstrația teoremei.

Lemă. Pentru orice $0 < \varepsilon < i(\theta_0)$ există $\delta_0 > 0$ și $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$\nu_n(t) \leqslant \exp\left[-\frac{t^2}{2}\,(i(\theta_0) - \varepsilon)\right] \tag{6}$$

pentru $|t| \leqslant \delta_0\sqrt{n}$ și $n \geqslant N$.

Pentru orice $\delta > 0$ există $\varepsilon(\delta) > 0$ și $N(\delta)$ astfel ca

$$\sup_{|t|>\delta\sqrt{n}} \nu_n(t) \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{4}\right),\ n > N(\delta). \tag{7}$$

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\,i(\theta_0)\,t^2\right) \text{ aproape sigur}$$

Demonstrația lemei

$$(8)\quad \ln v_n(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln p\left(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i; \hat{\theta}_n)\right] =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n)}{\partial\theta} + \frac{t^2}{2n}\sum_{1}^{n}\frac{\partial^2 \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i\, \theta_n^*)}{\partial\theta^2}$$

unde

$$|\theta_n^* - \hat{\theta}_n| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}}$$

Termenul

$$\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln p(u(c, x^{(i-1)})\, x_i, \hat{\theta}_n)}{\partial\theta} = 0$$

aproape sigur pentru $n > N^*$ ceea ce rezultă din Teorema 02 în care s-a arătat că șirul de variabile

$$(\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta_0))_{n\in N^*}$$

converge în repartiție către o variabilă normală cu media 0 și dispersia σ^2.

Pentru cel de-al 2-lea termen putem scrie

$$(9)\quad \frac{t^2}{2n}\sum_{1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_n^*) = \frac{t^2}{2n}\sum_{1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0) +$$

$$+ \frac{t^2}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[\ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_n^*) - \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0)]$$

Din teorema 03 rezultă că primul termen din descompunerea (9) tinde aproape sigur către $-\frac{t^2}{2}\, i(\theta_0)$ iar din teorema 02 cel de-al 2-lea termen tinde aproape sigur către 0.

Înseamnă că putem scrie: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_1(\varepsilon)$ astfel încît:

$$(10)\quad \frac{t^2}{2n}\sum_{1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[\ln p(u(c, x^{(i-1)})\, x_i, \theta_0)] < \frac{t^2}{2}(\varepsilon - i(\theta_0)) \text{ pentru } n > N_1(\varepsilon)$$

Să alegem $\delta_0 < \frac{\eta(\theta_0)}{2}$ unde $\eta(\theta_0)$ este definit în ipoteza K_3. Deoarece $\hat{\theta}_n \to \theta_0$ aproape sigur rezultă că pentru n suficient de mare $|\hat{\theta}_n - \theta_0| < \delta_0$ și în același timp $|\theta_n^* - \hat{\theta}_n| < \frac{t}{\sqrt{n}} < \delta_0$

Deci pentru $n > N$ putem scrie că

$$\frac{1}{n}\sum_{1=i}^{n}\left\{\frac{\partial^2 \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_n^*}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 \ln p(u(c, x^{(i-1)}) x_i, \theta_0)}{\partial\theta^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \sup_{|\theta-\theta_0|\leqslant 2\delta_0}\left[\frac{\partial^2 \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta)}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0)}{\partial\theta^2}\right]$$

care tinde pentru $n \to \infty$ aproape sigur la

$$\overline{M}^{\infty}\left\{\sup_{|\theta-\theta_0|\leqslant 2\delta_0}\left[\frac{\partial^2 \ln p(c, x, \theta)}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 \ln p(c, x, \theta_0)}{\partial\theta^2}\right]\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

ceea ce rezultă din continuitatea derivatelor parțiale presupusă în C_3.

Din evaluările (10) și (11) rezultă că

$$\ln \nu_n(t) < -\frac{t^2}{2}(i(\theta_0) - \varepsilon), \text{ pentru } \frac{t}{\sqrt{n}} \leqslant \delta_0$$

Pentru a demonstra relația 2-a vom scrie:

$$\frac{1}{n}\ln\nu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left\{\ln p\left(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \right. \tag{12}$$

$$\left. - \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0)\right\} + \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\{\ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0) -$$

$$- \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n)\}$$

Dacă $|\hat{\theta}_n - \theta_0| < \frac{\delta}{2}$ atunci relația $\frac{t}{\sqrt{n}} > \delta$ implică $\left|\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}} - \theta_0\right| > \frac{\delta}{2}$

Putem scrie

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left\{\ln p\left[u(c, x^{(i-1)}), x_i, \hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right] - \ln p\,[u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0]\right\} \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \sup_{|\theta-\theta_0|>\frac{\delta}{2}} [\ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta) - \ln p(u(c, x^{(i-1)}), x_i, \theta_0)]$$

Acest termen tinde către

$$\overline{M}^{\infty}\{\sup_{|\theta-\theta_0|>\frac{\delta}{2}} [\ln p(c, x; \theta) - \ln p(c, x; \theta_0)]\}$$

Cel de-al doilea termen din (12) tinde aproape sigur către zero (deoarece θ converge aproape sigur la θ_0).

Alegem pe ε astfel ca:

$$0 < \varepsilon < -\overline{M}^{\infty}\{\sup_{|\theta-\theta_0|}(\ln p(c, x, \theta) - \ln p(c, x, \theta_0))\}$$

Rezultă din relațiile (12) și (13) că pentru $\frac{t}{\sqrt{n}} > \delta$ și pentru n suficient de mare

$$\ln \nu_n(t) \leqslant -\frac{n\varepsilon}{4}$$

În continuare demonstrarea teoremei reproduse demonstrația teoremei pentru lanțuri Markov dată în [3].

Etapele demonstrației teoremei sînt următoarele:

Se arată pentru început că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant\delta_0\sqrt{n}} K(t) \left|\nu_n(t)\,\lambda\left(\theta_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \lambda(\theta_0)\exp\left(-\frac{i(\theta_0)t^2}{2}\right)\right| dt = 0 \tag{14}$$

aproape sigur pentru δ_0 convenabil ales.

Pentru aceasta majorăm integrala din (14) astfel

$$\int_{|t|\leqslant\delta_0\sqrt{n}} K(t) \left|\nu_n(t)\,\lambda\left(\check{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \lambda(\theta_0)\exp\left(-\frac{i(\theta_0)\,t^2}{2}\right)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t|\leqslant\delta_0\sqrt{n}} K(t)\,\lambda(\theta_0) \left|\nu_n(t) - \exp\left(-\frac{i(\theta_0)\,t^2}{2}\right)\right| dt +$$

$$+ \int_{|t|\leqslant\delta_0\sqrt{n}} K(t)\nu_n(t) \left|\lambda(\theta_0) - \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}} + \hat{\theta}_n\right)\right| dt$$

Fie $\varepsilon > 0$ astfel ca

$$\int K(t)\exp\left(-\frac{i(\theta_0) - \varepsilon}{2}\right) t^2\, dt < \infty.$$

Ținînd seama de lema demonstrată înainte, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant\delta_1\sqrt{n}} K(t)\,\lambda(\theta_0) \left|\nu_n(t) - \exp\left(-\frac{i(\theta_0)\,t^2}{2}\right)\right| dt = 0$$

aproape sigur.

Pe de altă parte

$$\int_{|t|\leqslant\delta_1\sqrt{n}} K(t)\,\nu_n(t) \left|\lambda(\theta_0) - \lambda\left(\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\theta-\theta_0|\leqslant\delta_1} |\lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)| \int_{|t|\leqslant\delta_1\sqrt{n}} K(t)\exp\left(-\frac{(i(\theta_0) - \varepsilon)t^2}{2}\right) dt$$

Fie $\eta > 0$ dat, alegem $\delta_0 \leqslant \delta_1$ astfel ca

$$\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta_0} |\lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)| \int_{|t|\leqslant\delta_0\sqrt{n}} K(t)\exp\left[-\frac{(i''(\theta_0) - \varepsilon)\,t^2}{2}\right] < \eta$$

de unde rezultă relația căutată.

Asemănător se arată că pentru $\delta > 0$

$$(15) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta\sqrt{n}} K(t) \left| \nu_n(t)\, \lambda\left(\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \lambda(\theta_0) \exp\left(-\frac{i(\theta_0)\, t^2}{2}\right) \right| dt = 0$$

aproape sigur.

Pentru aceasta se folosesc ipotezele K_5 şi K_6 şi rezultatele lemei 1.

Din (14) ţi (15) rezultă luînd $K = 1$ că

$$C_n = \int \nu_n(t)\, \lambda\left(\hat{\theta}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt \to \lambda(\theta_0) \sqrt{\frac{2\pi}{i(\theta)}}$$

aproape sigur.

De asemenea rezultă că

$$\int K(t) \left| f_n^*(t \mid x_0, \ldots, x_n) - \sqrt{\frac{i(\theta_0)}{2\pi}} \exp\left(-\frac{i(\theta_0)\, t^2}{2}\right) \right| dt \to 0$$

aproape sigur.

Deci rezultatul stabilit în [3] pentru lanţuri Markov se păstrează şi pentru sisteme cu legături complete.

Primită la 28 februarie 1972 Institutul Politehnic Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Botez „Probleme de inferenţă statistică pentru modele aleatoare discrete" — teză de doctorat.
2. M. Botez — Bull. mathemath. vol. 8 nr. 3—4 1964
3. Borwanker. Kallianpur Prakasa Rao, Amnals of Math. Stat. nr. 4. Aug. 1971. „The Bernstein — von Mises theorem for Markov processes"
4. H. Cohn, Bull. mathemath. vol. 8 nr. 1—2 1964.
5. M. Iosifescu, „Sur la loi forte des grands nombres pour les systemes aleatoires homogenes a liaisons completes, C.R. Sci. Paris t. 258, 1964.

A THEOREM OF BERNSTEIN — VON MISES TYPE FOR RANDOM SYSTEMS WITH COMPLETE CONNEXIONS

SUMMARY

In the present paper we extend to sistems with complet connextions, the aproach of the posterior density $f_n(t \mid x_0, \ldots, x_n)$ of variable $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ to the normal one.

REZUMAT

În lucrare se extinde un rezultat stabilit în [3] pentru ianţuri Markov la sisteme cu legături complete privind comportarea la limită a densităţii posterioare $f_n(t \mid x, \ldots, x_n)$ a şirului de variabile $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta_0)$.

DETERMINAREA REACȚIUNII HIDRODINAMICE EXERCITATE DE UN FLUID VÎSCOS ASUPRA PLĂCII ANTRENANTE

VICTORIA CRISTEA

În această lucrare se determină expresia reacțiunii hidrodinamice a unui fluid vîscos, antrenat de mișcarea unei plăci antrenante. Mișcarea are loc paralel cu generatoarele cilindrului fix care limitează fluidul, în ipotezele considerate în lucrarea [2].

1. Într-o lucrare anterioară am studiat mișcarea de antrenare a unui fluid vîscos, limitat de un perete cilindric de rotație în jurul axei Oz și de înălțime infinită. Mișcarea este produsă de translația unei plăci solide de forma unei benzi infinite în planul de simetrie xOz a cilindrului în sensul generatoarelor acestuia, cu viteză constantă W_0 paralelă cu axa Oz.

Păstrînd notațiile din lucrarea menționată [2] s-au deosebit două cazuri pe care le vom considera succesiv în vederea evaluării efortului exercitat de fluid asupra plăcii, pentru o bandă de lungime egală cu unitatea socotită în sensul generatoarelor.

2. Se știe că vectorul tensiune $\vec{T}(T_x, T_y, T_z)$ pe perete se exprimă prin

$$\vec{T} = p\vec{n} - \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}, \tag{1}$$

unde $\vec{n}(\alpha, \beta, 0)$ este versorul normalei orientate pozitiv de la fluid spre perete. Rezultă de aici că în ipotezele în care s-a lucrat că rezultanta $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ a tensiunilor exercitate de fluid pe banda menționată este dată de:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = -\mu \int_c \frac{\partial w}{\partial n} \, ds = -\mu \int_c \frac{\partial w^*}{\partial s} \, ds, \tag{2}$$

unde μ este constanta de vîscozitate iar C segmentul $[a, b]$ de pe asa Ox care este parcurs pe ambele laturi ale sale în sensul care lasă exteriorul la dreapta. Reamintim că cîmpul vitezelor este $\vec{v}(0, 0, w(x, y)$, unde

$$w(x, y) = w_0 U(x, y) \tag{3}$$

$U(x, y)$ fiind funcţia armonică care a fost determinată iar $V(x, y)$ este conjugata ei armonică.

Rezultă de aici relaţia

$$R_z = -\mu w_0 \omega, \tag{4}$$

unde ω este perioada lui $V(x, y)$ în jurul lui C socotit în sensul menţionat.

Cazul I.

În acest caz avem $0 < a < b < R$. Din [2], formula (6) rezultă:

$$i\omega = \beta \oint_c \frac{dz}{\sqrt{g(z)}}. \tag{5}$$

Ţinînd seama de relaţiile [2], formulele (8), se deduce de aici

$$\omega = -2\beta \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\left|(x-a)(x-b)\left(x-\frac{R^2}{a}\right)\left(x-\frac{R^2}{b}\right)\right|}} \tag{6}$$

radicalul fiind luat cu determinaţia artimetică.

Înlocuind pe β prin expresia sa rezultă:

$$R_z = -2\mu w_0 \frac{\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{|g(x)|}}}{\int_b^R \frac{dx}{\sqrt{|g(x)|}}}. \tag{7}$$

Cazul II.

În acest caz s-a presupus $-R < a < 0 < b < R$.

Din [2], formula (11), rezultă

$$i\omega = -i\beta \oint_c \frac{dz}{\sqrt{g(z)}}. \tag{8}$$

Ţinînd acum seama de formulele [2], (10), care precizează determinaţia radicalului rezultă iarăşi

$$\omega = -2\beta \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{g(z)}}, \tag{9}$$

unde radicalul figurează cu determinaţia sa aritmetică.

Înlocuind constanta β prin expresia sa [2], (13), se obţine pentru R_x din nou expresia (7) care este astfel valabilă în ambele cazuri.

Este de remarcat că formula (7) generalizează un rezultat dat anterior [1], (17).

BIBLIOGRAFIE

1. Victoria Cristea, Asupra unei mișcări fluide vîscoase. Studii și cercetări matematice, tomul 21, nr. 9, 1969 1265–1270.
2. Victoria Cristea, Asupra deplasării unei plăci plane într-un fluid vîscos limitat de un cilindru. Studii și cercetări matematice. (sub tipar)
3. R. Berker, Intégration des équations de mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch der Physik VIII|2, 78, 1963.
4. Caius Jacob, Recherches sur le mouvement engendré par la rotation de plusieurs corps solides. Disquisitiones Mathematicae et Physicae, 3–4, 236, 1943.

Primită la 15 aprilie 1972 Institutul de Construcții București

DÉTERMINATION DE LA RÉACTION HYDRODYNAMIQUE EXERCÉE PAR UN FLUID VISQUEUX SUR UNE PLAQUE ENTRAÎNANTE.

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on détermine l'expression de la réaction hydrodynamique d'un fluide visqueux entraîné par le mouvement de translation d'une plaque, sur la plaque elle – même. Le mouvement a lieu parallèlement aux génératrices du cylindre fixe qui limite le fluide, dans les hypothèses considérées dans le travail [2].

PROBLEME DE CRIPTOGRAFIE

ILIE CRISTESCU, ILIE TORSAN

În cadrul Seminarului de matematici aplicate de la Facultatea de matematică din București, condus de acad. N. Teodorescu, teoria informației ocupă un loc central în cadrul dezbaterilor.

Printre aplicațiile teoriei informației, problema sistemelor secrete a făcut obiectul mai multor ședințe în cadrul cărora, în primul rînd (dar nu în exclusivitate) au fost discutate problemele de criptografie așa cum sînt ele prezentate de C. SHANNON în (3).

În cadrul acestui articol ne vom referi la două probleme mai puțin tratate în bibliografia care ne-a stat la dispoziție și anume:

I. Clasificarea sistemelor secrete.

II. Decriptarea anumitor sisteme secrete.

Ne-am oprit asupra acestor probleme deoarece nu am întîlnit o clasificare a sistemelor secrete cu toate că teoria informației oferă această posibilitate dar mai ales datorită faptului că metodele de decriptare (descifrarea unui sistem fără a avea cunoștințe asupra metodei) pot interesa pe arheologi și istorici care prin natura muncii lor pot întîlni scrieri cifrate în care, după descriptare, se găsesc informații prețioase despre problemele studiate. Aceste probleme pot constitui totodată și interesante probleme de studiu pentru matematicienii antrenați în activitatea de aplicare a matematicii în domeniile științelor umaniste precum și pentru matematicienii amatori de probleme rebusiste.

I. CLASIFICAREA SISTEMELOR DE CIFRARE.

Fie L o limbă oarecare, $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alfabetul ei și $a_1, a_2, ..., a_n$ literele alfabetului.

O succesiune de litere

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$$

se va numi cuvînt de lungime n.

Vom numi mesaj o succesiune oarecare de cuvinte. Notăm cu (M) mulţimea mesajelor posibile.

Din mulţimea (M) putem întotdeauna alege o submulţime

$$G(M) = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$$

care să aibă proprietatea că oricare ar fi mesajul M, el se poate scrie ca o succesiune de elemente g_i. Numim mulţimea $G(M)$ mulţime generatoare iar elementele sale, elemente generatoare.

Să considerăm acum o mulţime finită

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$$

cu elementele căreia formăm toate mulţimile de forma

$$C_k = (c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \mid c_{i_j} \in C) \text{ pentru } k \geqslant 1$$

adică mulţimile formate din succesiunile de cîte k elemente din C, pentru care avem card $(C_k) = r^k$

Mulţimile C_k le vom numi clase de rangul k.

Fie (T_i) o mulţime de transformări uni-inversabile care stabilesc o corespondenţă între (M) şi mulţimea $C = \bigcup_k C_k$ şi să notăm cu $C_j(i)$ imaginea elementului generator g_i prin transformarea $T \in (T_i)$. Indicaţiile j ne indică clasa la care îi aparţine imaginea.

Deoarece, orice mesaj M se scrie ca o succesiune de elemente generatoare, prin aplicarea transformării T el devine o succesiune de imagini corespunzătoare elementelor generatoare componente. Vom numi această succesiune, criptogramă şi vom nota cu E mulţimea tuturor criptogramelor.

Definiţia 1. *Vom numi sistem secret S_i, sistemul în care o mulţime de transformări uni-inversabile T_i transformă mulţimea mesajelor posibile (M) în mulţimea criptogramelor (E).*

Ţinînd seama de structura elementelor generatoare g_i şi a imaginilor lor putem obţine o clasificare a sistemelor de cifrare.

Astfel avem:

1. Clasa substituţiilor cu reprezentări unice, S_u.
2. Clasa substituţiilor cu reprezentări multiple S_m.

Definiţia 2. *Spunem că sistemul $S_i \in S_u$ dacă oricare ar fi elementul generator g_j, avînd imaginea $C_g(i)$,* card $(C_j(i)) = 1$.

Cel mai simplu sistem din această clasă este *simpla substituţie* definită de C. SHANNON în (5).

Exemple:

a). Dacă mulţimea generatoare $G(M)$ coincide cu un alfabet cu 25 litere $(A, B, \ldots, Z)$, (de exemplu alfabetul latin din care am eliminat litera W), $C = (1, 2, 3, 4, 5)$ şi pentru orice element generator g_i imaginea lui $C_j(i)$ C_2

avînd card $(C_j(i)) = 1$, obţinem aşa numitul cifru cu numerotare, frecvent utilizat de grecii antici. Schematic acest cifru se prezintă astfel

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	X	Y	Z

fiecare literă cifrîndu-se printr-un număr constituit din indicele de linie şi de coloană LA intersecţia cărora se află.

Astfel comunicarea SOSESC MÎINE devine
44. 35. 44. 15. 44. 13 33. 24. 24. 34. 15.

O variantă a acestui sistem este prezentată de E. BOSIANU în (1).

b). Dacă $G(M)$ coincide cu alfabetul A, $C = (a, b)$ şi pentru orice element generator g_i imaginea sa aparţine clasei de rang 5, obţinem cifrul lui FRANCIS BACON (1561 — 1626), lord cancelar în timpul reginei ELISABETA I a Angliei. Într-o variantă a acestui sistem avem

A = aaaaa	I = abaaa	R = baaaa	
B = aaaab	K = abaab	S = baaab	
C = aaaba	L = ababa	T = baaba	.....

Prin intermediul acestui cifru, un cuvînt ca BARCA s-ar scrie:
aaaabaaaaabaaaaaaabaaaaaa

Definiţia 3. *Spunem că sistemul $S_i \in S_m$ dacă există cel puţin un element generator g_i avînd imaginea $C_j(i)$ astfel încît* card $(C_j(i)) > 1$.

a). Sistemul cu *dublă numerotare* a cărui schemă este prezentată mai jos

		1	2	3	4	5
6	1	A	B	C	D	E
7	2	F	G	H	I	J
8	3	K	L	M	N	O
9	4	P	Q	R	S	T
0	5	U	V	X	Y	Z

aparţine clasei S_m avînd în acest caz, $G(M) = A$,
$C = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ şi pentru orice element generator imaginea sa are două elemente din clasa de rang 2. Utilizînd acest sistem, cuvîntul I N F O R M A T I E devine
74. 34. 21. 85. 93. 33. 11. 95. 24. 65.

b). *Sistemul VIGENERE.*

În cadrul acestui sistem avem: $G(M) = C = A$, şi pentru orice element generator g_i avînd imaginea $C_j(i)$ avem $C_j(i) \in C_1$ şi card $(C_j(i)) = 26$ (dacă alfabetul are 26 de litere).

Se observă în acest caz că mai multe elemente generatoare pot avea una și aceiași imagine dar această ambiguitate se elimină datorită particularităților transformărilor T_i, particularități evidențiate de următoarea regulă de cifrare:

Considerăm o tabelă pătrată formată cu literele alfabetului, adică

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Să presupunem că vrem să cifrăm mesajul: STEFAN CEL MARE. Pentru aceasta se consideră un cuvînt „cheie" care se scrie în mod repetat deasupra literelor corespunzătoare ale mesajului. La intersecția dintre linia indicată de litera cheii și coloana indicată de litera corespunzătoare din mesaj, găsim litera cu care vom efectua cifrarea.

Astfel, alegînd cuvîntul CARTE drept cheie, mesajul ȘTEFAN CEL MARE (considerînd pe Q pauza dintre cuvinte) devine

C A R T E C A R T E C A R T E
Ș T E F A N Q C E L Q M A R E

U T V Y E P Q T X P S M R K I

Acest sistem deosebit de ingenios și comod a fost folosit pînă la sfîrșitul secolului al XIX-lea mai ales în armatele Franței, Italiei și Austriei.

Să notăm cu $p(g_i)$, probabilitatea de apariție în limbă a elementului generator g_i. Ținînd cont de aceste probabilități, clasa S_m se poate împărți în două subclase și anume: S_m^1 sau subclasa substituțiilor multiple proporționale și S_m^2 sau subclasa substituțiilor multiple uniform atribuite. Aceste subclase se definesc astfel:

DEFINIȚIA 4. *Sistemul* $S_i \in S_m^1$ *dacă pentru orice element generator* g_i *avînd imaginea* $C_j(i)$ *avem* card $(C_j(i)) = a.p(g_i)$.
unde a este o constantă de proporționalitate.

DEFINIȚIA 5. *Sistemul* $S_i \in S_m^2$ *dacă pentru orice element generator* g_i, *avînd imaginea* $C_j(i)$ *avem* card $(C_j(i)) = b > 1$
indiferent de probabilitatea $p(g_i)$.

De exemplu sistemul cu dublă numerotare expus mai sus aparține subclasei S_m^2.

Dacă ne vom referi acum la structura elementelor generatoare, putem defini următoarele clase de sisteme de cifrare:

1). Dacă $G(M) = A$, obținem sistemele de substituție de litere, cu care am făcut cunoștință mai sus.

2). Dacă $G(M) = (AA, AB, \ldots\ldots, YZ, ZZ)$, adică mulțimea generatoare coincide cu mulțimea digramelor obținem clasa substituțiilor de digrame. De exemplu sistemul PLAYFAIR pe care-l prezentăm mai jos face parte din această clasă.

Se consideră o tabelă 5×5 formată din literele alfabetului (din care am exclus litera W), dispuse într-o anumită ordine, de exemplu

A B C D E
F G H I J
K L M N O
P Q R S T
U V X Y Z

Mesajul care trebuie cifrat se împarte în diagrame consecutive iar cifrarea se face conform următoarelor reguli:

— Notăm digramele obținute din mesaj cu

$$m_{ij}\, m_{kr} \text{ pentru, } i, j, k, r = 1, 2, 3, 4, 5$$

Dacă $i = k$ și $j \neq 5$; $r \neq 5$ atunci digrama $m_{ij}\, m_{kr}$ se cifrează prin digrama $m_{ij+1}\, m_{ir+1}$ și dacă $j = 5$ sau $r = 5$ litera m_{ij}(respectiv m_{kr}) se cifrează întotdeauna prin m_{i1}(respectiv m_{k1}).

Dacă $j = r$ și $i \neq 5$ respectiv $k \neq 5$ atunci digrama $m_{ij}\, m_{kj}$ se cifrează prin $m_{i+1,\, j}\, m_{k+1,\, j}$ și dacă $i = 5$ (sau $k = 5$) atunci litera m_{ij} se cifrează întotdeauna prin m_{1j}.

Dacă $i \neq k$ și $j \neq r$ atunci digrama $m_{ij}\, m_{kr}$ se cifrează cu digrama $m_{ir}\, m_{kr}$.

Cu acest sistem, utilizînd tabela de mai sus, mesajul „M A T E M A - T I C A" se cifrează prin K C Z J K C S J D B

3). Dacă $G(M)$ coincide cu vocabularul limbii respective, atunci obținem așa numitele coduri. În acest caz în $G(M)$ noi considerăm ca element generatoare nu numai cuvintele dar chiar și anumite expresii mai frecvente în limba L.

II. DECRIPTAREA UNOR SISTEME SECRETE

Prin descriptarea unui sistem S_i, în sensul utilizat de JOHN LAFFIN în (9), înțelegem evidențierea mesajului M din analiza criptogramei E fără a avea cunoștințe despre sistemul utilizat și a cheii folosite.

Este evident că prin cifrarea unui mesaj M, caracteristicile statistice ale acestuia (frecvența literelor, digramelor, raportul consoană-vocală, numărul literelor distincte etc.) sînt perturbate, mai mult sau mai puțin în funcție de caracteristicile sistemului de cifrare folosite.

Sistemele care realizează o mai slabă perturbare a acestor caracteristici se decriptează mai ușor și în această categorie intră sistemele din clasa S_u, adică substituțiile cu reprezentări unice.

Exemplificăm acest lucru prin decriptarea cifrului cu numerotare pe care l-am prezentat anterior.

Considerăm dată următoarea criptogramă

35. 44. 45. 24. 34. 45. 13. 24. 44. 24. 13. 45. 24. 34. 21. 15. 43. 15.
42. 23. 15. 12. 45. 24. 53. 34. 15. 13. 13. 45. 53. 34. 12. 24. 12. 24. 34.
14. 42. 15. 53. 44. 15. 44. 15. 44. 13. 53. 45. 24. 31. 24. 55. 15. 55.
15. 32. 13. 45. 15. 32. 13. 45. 24. 12. 13.

Tabelul cu frecvența numerelor distincte din cadrul criptogramei este

n_i	11	12	13	14	15	21	22	23	24	25	31	32	33	34	35	41	42	43	44
f_i	0	4	8	1	10	1	0	1	11	0	1	2	0	5	1	0	2	1	5

n_i	45	51	52	53	54	55
f_i	9	0	0	4	0	2

Comparînd șirul frecvențelor numerelor din criptogramă cu șirul frecvențelor de apariție a literelor din limba română (vezi de exemplu (10)) obținem următoarele echivalențe probabile:

$$24 \equiv \mathrm{I}; \quad 15 \equiv \mathrm{E}; \quad 13 \equiv \mathrm{A}; \quad 45 \equiv \mathrm{R}; \quad 34 \equiv \mathrm{T}; \quad 53 \equiv \mathrm{N}.$$

care substituite în criptogramă, după anumite corectări necesare ne conduce la următorul text.

O ŞTIINŢĂ ÎŞI ATINGE PERFECŢIUNEA ATUNCI CÎND REUŞEŞTE SĂ UTILIZEZE MATEMATICA.

Nu am insistat asupra tuturor detaliilor de decriptare deoarece problema este simplă și în parte cunoscută (vezi de exemplu (7)).

Dacă sistemele din clasa S_u, nu prezintă dificultăți de decriptare, ne putem pune problema; care dintre celelalte sisteme se pot reduce, în privința decriptării la decriptarea sistemelor din clasa S_u.

Vom arăta în continuare, în acest sens, un mod de a descripta un sistem VIGENERE, prin reducerea la o simplă substituție. Acest lucru se bazează pe următoarea observație:

— Dacă M (l_1) respectiv M (l_2) sînt două secvențe identice dintr-un mesaj, de lungimi l_1 respectiv l_2 și care încep cu literele de abscisă r respectiv t (considerînd litera de început a mesajului ca origine a axei) și cheia are lungimea l, atunci cele două secvențe vor fi cifrate cu aceiași porțiune din cheie, dacă $(t - r) = k \cdot l$ $(t > r)$

De aici rezultă că va trebui să căutăm în criptograma analizată, porțiunile identice iar numerele care indică distanțele dintre aceste porțiuni să le descompunem în factori primi. Factorul comun, cel mai frecvent reprezintă chiar lungimea cheii. După determinarea lui l, nu avem decît să scriem criptograma pe l coloane și fiecare dintre ele va reprezenta o criptogramă obținută printr-o simplă substituție. Pentru evidențierea textului clar nu avem decît să decriptăm cele l substituții simple obținute.

Să considerăm, pentru exemplificare următoarea criptogramă:

UTVYE PQTXP SMRKI SNLJX TESNM GQJHG OTZMU
EAHNR SDFFR KTFKU NOTTP SMRKK KNZMU NAHWE
VIEXP GQJBU NAHHV KZFGX WLHME TIZJW CLUJI
NQVKE SVEJT TIEVM REHTP SELKS REZJG CRVJG
WNFLX GAHEY OERJW KQKHE VEHKS UTLKM NEHXM

Prin subliniere am evidenţiat cîteva secvenţe identice şi distanţele dintre ele.

PSMRK se mai află la distanţa $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

GQJ se mai află la distanţa $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

UNAH: se mai află la distanţa $15 = 3 \cdot 5$

ZMU se mai află la distanţa $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

de unde rezultă pentru lungimea cheii valoarea 5.

Împărţind criptograma pe cinci coloane şi ţinînd seama că fiecare coloană este rezultatul unei simple substituţii, obţinem destul de uşor textul clar: ŞTEFAN CEL MARE NU TREBUIE SOCOTIT UN DOMNITOR LOCAL, MĂRGINIT LA DATINELE ŞI LA ORIZONTUL ŢĂRII SALE, EL ERA UN PRINCIPE AL EUROPEI CARE CUNOŞTEA LUMEA ŞI TOATE ROSTURILE EI.

Evident că în cadrul acestei metode, esenţial este determinarea lungimii cheii, deci apariţia secvenţelor identice. Totuşi, pe baze statistice se pot determina anumiţi indicatori care să evidenţieze lungimea cheii chiar atunci cînd lipsesc secvenţele identice.

Vom prezenta un astfel de indicator, asemănător coeficienţilor de contingenţă familiari statisticienilor.

Considerăm următoarea criptogramă

HIUXT MGPTQ FIFCQ RSUREI GESGJ QOMYL
QERES HTQRV TLWGG ATIFA CXDMC XPQCU
SAVIA QTU.

şi presupunem pentru început că lungimea cheii ar fi 2. Vom scrie criptograma pe două coloane şi calculăm valoarea indicatorului

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{26} \frac{[f_s(a_i) - f_d(a_i)]^2}{f_s(a_i) + f_d(a_i)}$$

unde $f_s(a_i)$ reprezintă frecvența literei a_i din coloana din stînga iar $f_d(a_i)$ frecvența literei a_i din coloana din dreapta. În cazul criptogramei noastre avem:

a_i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
f_s	1				3	1	1	3	3	1		1					1	1	2	2	3	6	1	1	1			1
f_d	3		1		3		2	1	5			2	3		1	5	1	1				3	1			3

și deci $\rho_2 = 33{,}73$

În ipoteza că lungimea cheii ar fi $l = 3$ se împarte criptograma pe trei coloane, se omite coloana din mijloc și pentru coloanele rămase indicatorul are valoarea $\rho_3 = 21{,}5$ În mod asemănător obținem valorile $\rho_4 = 23{,}44$; $\rho_5 = 10{,}06$ și $\rho_1 = 68$.
Dar indicatorul ρ are proprietatea că $\rho_r > \rho_t$ pentru orice r divizor al numărului l (adică lungimea cheii). În cazul exemplului nostru rezultă atunci că am avea o cheie de lungime 1, 2 sau 4, dar cu criptograma dată nu prezintă caracteristicele unei simple substituții valoarea $l = 1$ nu se admite și din două încercări rezultă că $l = 4$ este adevărata lungime a cheii utilizate.

Împărțind deci criptograma pe patru coloane și decriptînd fiecare dintre cele patru simple substituții se ajunge la următorul text clar:
SISTEMELE DE CONDUCERE CU MIJLOACE DE PRELUCRARE AUTOMATĂ A DATELOR.

În cazul acestui articol ne-am referit pe scurt la decriptarea simplei substituții și la sistemul VIGENERE urmînd ca într-un articol viitor să ne ocupăm și de alte sisteme ca de exemplu PLAYFAIR, PORTA etc. precum și de problema distanței de unicitate a sistemelor, redundanța lor etc., probleme tratate în cazul general de C. SHANNON în (5).

BIBLIOGRAFIE:

1. E. BOSIANU „Tratat de stenografie și cryptografie" Ed. II. 1864, București.
2. E. CANTEA „Din tainele omenești" 1921, București
3. E. GRIGORAȘ „Criptografia și istoria românească" 1923, București.
4. N. VASILESCU „Mică incursiune în criptografie" Magazinul Istoric nr. 6, pp. 64–68 și nr. 7–8 pp. 62–68, 1968
5. C. SHANNON „Communication theory of secrecy sistems" Bell. Telephone System. 1948
6. R. TUDOR „Secretul secretelor" Almanahul Stiință și Tehnică, 1970, pp. 91–93.
7. S. MARCUS „Limbă, informație, coduri" G.M.F. nr. 7, iulie, 1960
8. OLIVER SVEKUS „Titkosirasok" 1964, Budapesta.
9. JAHN LAFFIN „Petit code des codes secrets" adaptare franceză de RAGER GHEYSENS. Ed. Arts et Voyages, Paris 1968.
10. I. CONSTANTINESCU, S. CONDREA, E. NICOLAU. Teoria informației. Ed. Tehnică. 1958. București.

Primită la 5 iunie 1972

Seminarul de matematici aplicate
Facultatea de Matematică — Mecanică, București.

PROBLEME DE CRIPTOGRAFIE

(REZUMAT)

În această lucrare se fac cîteva observații referitoare la clasificarea sistemelor secrete și la posibilitățile care există pentru decriptarea unora dintre ele.

Lucrarea se încadrează în tematica Seminarului de matematici aplicate de la Fac. de Matematică din București, condus de acad. N. Teodorescu.

PROBLÈMES DE CRYPTOGRAPHIE

(RÉSUMÉE)

Cet article contient quelques observations sur la classification des systèmes secrets et sur les possibilités connues de les decrypter.

L'ouvrage fait partie d'un groupe de recherches du seminaire de mathématiques appliquées présidé par l'académicien N. Teodorescu à la Faculté de mathématique de Bucarest.

ON THE MOTION IN THE PRESENCE OF AN ELLIPTICAL INHOMOGENEITY

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ

1. The motion through inhomogeneous media has been studied for various types of variation of the filtration coefficient, as well as for several surfaces separating different porous media. In the case of plane steady linear motion through media of the type II, the elliptical inhomogeneity has a particular importance, and for this inhomogeneity the complex potentials describing the motion in the exterior and the interior of the ellipse have been obtained (e. g. [1], [2], [3]) and the discharge of the fluid passing through the ellipse has been derived [4]. The method used in [1] allows to deal with the motion in the presence of several confocal ellipses [5], but it is interesting to obtain closed formulas concerning at least these inhomogeneities. Here some closed formulas are deduced, in the same general assumptions as in the previous papers, i. e. the plane motion is steady and linear (the Darcy law is valid), the porous medium being isotropic.

2. Let the ellipse (E)

$$x^2 s^{-2} + y^2 t^{-2} = 1 \tag{1}$$

be the frontier of separation between the domains D_1 and D_2, the first being characterized by the constant filtration coefficient k_1 and the second one by the constant coefficient k_2. In D_1, at large distances from the origin, there is a uniform stream of speed V_0, and its complex potential can be written

$$f_0(z) = V_0 z e^{-i\alpha}, \tag{2}$$

where $z = x + iy$ and $f_0(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$. Between the foci of (E) there is an impervious plate of negligible thickness, therefore the considered medium is of the type I — II, because we have two filtration coeficients, different from zero in general, and the third filtration coefficient, characterizing the material of the cut between the foci, is zero.

Denoting

$$a^2 = s^2 - t^2, \tag{3}$$

by the conformal mapping

$$z = a(Z + Z^{-1})|2 \tag{4}$$

(E) is represented on the circle $|Z| = b$, where

$$b = \left(\frac{s+t}{s-t}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

and the circle $|Z| = 1$ corresponds to the cut between the foci.

The conditions which are to be satisfied on (E) and the cut are known, and the same conditions must be verified on these two circles. Having in view (2) and (4), to a uniform stream at large distances from the origin in the plane z will correspond a uniform stream at great distances in the second plane Z and its complex potential will be

$$F_0(Z) = \frac{1}{2} V_0 Z a e^{-i\alpha}, \tag{6}$$

where $F_0(Z) = \Phi_0(X, Y) + i\Psi_0(X, Y)$. The motion in the presence of this porous medium will be described in D_1 and, respectively, in D_2 by the complex potentials

$$F_j = F_0 + F_j^*, \; j = 1, 2$$

and the problem is to deduce $F_1^*$and F_2^* satisfying the matching conditions on $|Z| = b$ and the condition of zero normal velocity on $|Z| = 1$. It is easy to deduce that

$$F_1^* = AZ^{-1}, \quad F_2^* = BZ^{-1} + CZ,$$

where A, B and C are complex coefficients. The mentioned conditions,

$$k_2\Phi_1^* - k_1\Phi_2^* = (k_1 - k_2)\,\Phi_0, \quad \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial r} = \frac{\partial\Phi_2^*}{\partial r} \text{ on } |Z| = b,$$

$$\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial r} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \text{ on } |Z| = 1,$$

allows to obtain the coefficients. From (4) it follows that

$$aZ = z + (z^2 - a^2)^{1/2},$$

and in the physical plane we have

$$f_1(z) = \frac{V_0}{2}\left\{[z + (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\,e^{-i\alpha} + \frac{s+t}{s-t}\cdot\frac{sk_1 - tk_2}{sk_1 + tk_2}[z - (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\,e^{i\alpha}\right\}, \tag{7}$$

$$f_2(z) = V_0 k_2 (s+t)\,(k_1 s + k_2 t)^{-1}\,[z\cos\alpha - i(z^2 - a^2)^{1/2}\sin\alpha]. \tag{8}$$

These formulas solve completely the proposed problem.

3. First let us verify (7) and (8). When $k_1 = k_2$ we obtain that the expressions of f_1 and f_2 are the same, namely

$$f = V_0[\cos\alpha - i(z^2 - a^2)^{1/2}\sin\alpha],$$

which describes the motion produced by a uniform stream at great distance in the presence of an impervious plate of negligible thickness with its ends in the points $z = a$ and $z = -a$.

When the medium filling D_2 becomes impervious, $f_2 = 0$, i.e. the motion in D_2 vanishes, and

$$f_1 = \frac{V_0}{2}\left\{[z + (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\, e^{-i\alpha} + \frac{s+t}{s-t}[z - (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\, e^{i\alpha}\right\},$$

which represents the complex potential of a uniform stream at great distances, in the case of irrotational motion, when there is an elliptical cylinder filling D_2 (e.g.[6], § 6. 31).

At great distance from the origin we have certainly

$$f_1 \to V_0 z e^{-i\alpha},$$

and this behaviour follows from (7) too.

Another limit case is for $k_2 = \infty$, i. e. D_2 is a cavity having an impervious plate between the foci, when

$$f_1 = \frac{V_0}{2}\left\{[z + (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\, e^{-i\alpha} - \frac{s+t}{s-t}[z - (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\, e^{i\alpha}\right\}, \tag{9}$$

$$f_2 = V_0(s + t)\,[z \cos\alpha - i(z^2 - a^2)^{1/2}\sin\alpha]\,|\,t. \tag{10}$$

The equation (9) coincides with the equation (1) from [2], p. 281, but (10) is different from equation (2) (idem), because in [2] it is assumed that it is no impervious plate in the cavity.

In order to deduce the discharge of the fluid passing through (E) we use (8), writing z in parametric form, $s \cos\theta + it \sin\theta$, and separating the imaginary part. We get for the stream function on (E)

$$\Psi_2 = V_0 k_2 t(s + t)\,(k_2 t + h_1 s)^{-1} \sin(\theta - \alpha), \tag{11}$$

therefore the points where Ψ_2 is maximum or minimum are given by

$$\theta = \alpha \pm \pi|2,$$

whence the apparently unexpected result is obtained for the discharge,

$$Q = 2V_0 k_2 t(s + t)\,(k_2 t + k_1 s)^{1/2}, \tag{12}$$

that is, the discharge Q does not depend upon θ, as in the case of a cavity without the impervious cut. The reason of this result seems to be the great speeds which appear, for $\alpha \neq 0$, at the ends of the impervious cut.

It is known that for an elliptical cavity the discharge Q_0 of fluid passing through the cavity is (e.g.[2], p. 282)

$$Q_0 = 2V_0(s + t)$$

and then Q can be written

$$Q = Q_0 k_2 t/(k_2 t + k_1 s). \tag{12'}$$

As always $k_2t|(k_2t + k_1s) < 1$, it follows that $Q < Q_0$ for any t and s and any finite value of k_2.

When k_2 is very small in comparison to k_1 and the axes are of the same order of magnitude we can write approximately

$$Q \approx Q_0 k_2 t/(k_1 s),$$

but when t is negligible relative to s and the filtration coefficients are comparable we may write

$$Q \approx 2V_0 k_2 t/k_1.$$

In the case of cavity with the cut we obtain for $\alpha = 0$

$$f_1 = V_0(s-t)^{-1}[s(z^2 - a^{2^{1/2}}) - tz], \quad f_2 = V_0(s+t)\,t^{-1}\,z, \tag{13}$$

and for $\alpha = \pi/2$

$$f_1 = iV_0(s-t)^{-1}[t(z^2-a^2)^{1/2} - sz], \quad f_2 = iV_0(s+t)\,t^{-1}\,(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

The formulas (13) and the first formula (14) are the same with the corresponding formulas from [2], p. 281, as it should to be expected. The last formula(14) is different, because always the filtration velocity is infinite at the ends of the cut.

4. The above result is explained in a natural way in the same manner as in [2], p. 283 and [7]. The conformal transformation (4) does not change the direction of axes, nor the point at infinity, and in these conditions the discharge of the fluid passing through the common frontiers of D_1 and D_2 does not depend upon the angle α between the real axis and the direction of the motion at infinity.

As a direct application of the theorem proved in [7], let us consider the case when between the foci there is a crack, i.e, the segment with ist ends in the foci represents a cavity of negligible thickness. Using (4), we have to determine the complex coefficients A, B and C, by the same matching conditions on $|Z| = b$, but on $|Z| = 1$ we must have

$$\Phi_2^* = -\Phi_0.$$

For $f_1(z)$ we obtain

$$f_1(z) = \frac{V_0}{2}\left\{[z + (z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]\,e^{-i\alpha} + \frac{s+t}{s-t}\cdot\frac{tk_1 - sk_2}{tk_1 + sk_2}[z - (z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]\,e^{i\alpha}\right\} \tag{15}$$

and it is verified that $f_1 \to V_0 z e^{-i\alpha}$ when $|z| \to \infty$. If $k_2 \to \infty$ we have again (9), and this in accordance with the remark that, whatever an impervious body may be in a cavity, the motion in D_1, in the case of the reduced problem, is the same.

The discharge Q of the fluid passing through (E) is found to be

$$Q = sk_2Q_0/(sk_2 + tk_1), \tag{16}$$

and, as $s > t$, it follows that this discharge is always greater than the discharge given by (12) or(12′. This is in accordance with the physical conditions of these cases.

When $k^2 \to \infty$, f_1 tends towards the expression of the complex potential of a uniform stream at great distances, in the case of irrotational motionl of perfect imcompressible fluids, given by(9), but when $k_1 = k_2$

$$f_2 = V_0[(z^2 - a^2)^{1/2} \cos\alpha - iz \sin\alpha],$$

and the discharge of the fluid passing through the crack is $2V_0a$, for any value of α, as it has been shown previously ([2], p. 286).

REFERENCES

1. Şt. I. GHEORGHIŢĂ: Some motions through inhomogenecus porous media, Bull. Şt. Mat. Fiz. Acad. R.P.R., VI, 1954, p. 283 (in Rumanian)
2. Şt. I. GHEORGHIŢĂ: Mathematical Methods in Underground Hydrogasdynamics, Ed. Acad. R.S. România, 1966 (in Rumanian)
3. ELENA UNGUREANU: Boundary value problems in the motion of fluids through porous inhomogeneous media, St. Cerc. Mat., tome 23, 1971, p. 911 (in Rumanian)
4. ST. I. GHEORGHITZA: On a problem in the theory of flow through inhomogeneous porous media, J. Math. Phys. Sci., Vol. 7, 1973, p. 37
5. ST. I. GHEORGHIŢĂ: On the fluid motion through inhomogeneous porous media, when the frontiers of separations are confocal ellipses, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., Tome 4(52), no. 2, 1960, p. 25 (in Russian)
6. L. M. MILNE-THOMSON: Theoretical Hydrodynamics, Fourth edition, St. Martin's Press, London, 1960
7. IOAN DAVID: Sur la généralisation d'un théorème du mouvement plan en milieux poreux ayant une cavité, Comptes Rendus, tome 269, 1969, p. 809

Received on November 13, 1972.

Bucharest University
Faculty of Mathematics and Mechanics

HEAT TRANSFER IN EKMAN LAYER OVER A POROUS PLATE

by

P. S. GUPTA AND A. S. GUPTA
Mathematics Department
Indian Institute of Technology, Kharagpur.

An exact solution of the energy equation corresponding to the flow in the Ekman layer over a flat porous plate subject to uniform suction is obtained. It is found that heat may flow from the fluid to plate even if the plate temperature be higher than that of the ambient stream. Further, it is shown that as Eckert number increases form zero, heat starts flowing from the fluid to the wall at a value of Eckert number smaller than the corresponding number in the absence of rotation.

1. INTRODUCTION

A surprinsingly simple solution of the Navier-Stokes equations was found by Griffith and Meredith and discussed in Schlichting [1] for the steady flow past a flat plate at zero incidence, the plate being subjected to uniform suction. Further if an infinite flat plate be at rest in a frame of reference rotating with an incompressible viscous fluid and there is a uniform flow with velocity „U" past this plate, then near the plate the viscous and Coriolis forces are of the same order of magnitude in a layer known as the Ekman layer. The flow characteristics of this layer have been discussed in detail by Batchelor in his monograph [2].

The object of the present investigation is to study the flow and heat transfer characteristics of the Ekman layer near a porous plate subjected to uniform suction. The results of this study are likely to have bearing on boundary layer control in a rotating medium.

2. DETERMINATION OF THE VELOCITY FIELD

Consider the uniform flow with velocity U past an infinite porous flat plate coinciding with the plane $Z = 0$ at rest relative to a viscous incompressible fluid which is rotating with uniform angular velocity Ω about Z—axis, the uniform flow being along the x—axis.

The steady equations of motion in a rotating frame are

$$(q \cdot \nabla)\, q = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 q - 2\,\Omega \times q, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot q = 0, \tag{2}$$

where the velocity q has components (u, v, w).

The horizontal homogeneity demands that conditions depend on z only so that (2) gives $w = -w_0 =$ a constant with $w_0 > 0$ for suction. Equation (1) then gives

$$-w_0 \frac{du}{dz} = \nu \frac{d^2u}{dz^2} + 2\Omega v, \tag{3}$$

$$-w_0 \frac{dv}{dz} = \nu \frac{d^2v}{dz^2} - 2\,\Omega u - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{4}$$

$$0 = -\frac{dp}{dz}. \tag{5}$$

Since from (5), p is independent of z, the term $(1|\rho)\ \partial p/\partial y$ in (4) has the same value as that in the region far from the plate where there is a balance between the Coriolis force and the pressure gradient. Thus (4) can be written as

$$-w_0 \frac{dv}{dz} = \nu \frac{d^2v}{dz^2} - 2\,\Omega(u - U). \tag{6}$$

Introducing the following dimensionless quantities

$$F(\eta) = \frac{u}{U} - 1 + i\frac{v}{U}; \quad \eta = \frac{zU}{v}; \quad S = \frac{w_0}{U}; \quad E = \frac{2\,\Omega\nu}{U^2}, \tag{7}$$

equations (3) and (6) can be combined as

$$\frac{d^2F}{d\eta^2} + S\frac{dF}{d\eta} - iE\,F(\eta) = 0. \tag{8}$$

Since $u = v = 0$ at $z = 0$ and $u \to U$ and $v \to 0$ as $z \to \infty$, the boundary conditions for (8) are

$$F(0) = -1, \qquad F(\infty) = 0. \tag{9}$$

For suction $S > 0$ and the solution of (8) satisfying (9) is

$$F(\eta) = -\exp\left[-(\alpha + i\beta)\,\eta\right] \tag{10}$$

with

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{S}{2} + \left[(S^4 + 16E^2)^{1/2} + S^2\right]^{1/2}/2\sqrt{2}, \\ \beta &= \left[(S^4 + 16E^2)^{1/2} - S^2\right]^{1/2}/2\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Separating (10) into real and imaginary parts, we obtain the components of the velocity distribution as

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{u}{U} = 1 - e^{-\alpha\eta}\cos\beta\eta, \\[2ex] \dfrac{v}{U} = e^{-\alpha\eta}\sin\beta\eta, \end{cases}$$

which represents a spiral distribution of velocity similar to the Ekman spiral for a non-porous plate. The velocity vector at different heights above the plate rotates, the sense of rotation being clockwise from the direction of the pressure gradient. The penetration depth of the spiral which is a measure of the Ekman boundary layer thickness is of order $\nu/U\alpha$ and equation (11) shows that this depth decreases with increase in the suction parameter S. This is consistent with the fact that suction causes thinning of the boundary layer.

3. SOLUTION OF THE ENERGY EQUATION

With the velocity field given by (12), we now propose to determine the temperature distribution in the flow by solving the energy equation

$$(13)\qquad -\rho\, C_p w_0 \frac{dT}{dz} = \lambda \frac{d^2T}{dz^2} + \mu\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right],$$

where λ is the thermal conductivity and the other symbols have their usual meaning. In (13), it is tacitly assumed that $T = T(z)$ the plate being infinite, and the last term represents viscous dissipation.

The boundary conditions are

$$(14)\qquad T(0) = T_0; \quad T(\infty) = T_\infty.$$

Introducing a dimensionless temperature θ given by

$$(15)\qquad \theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$$

and using (12), equation (13) can be written as

$$(16)\qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + S\cdot Pr\cdot\frac{d\theta}{d\eta} = \text{Ec. Pr.}(\alpha^2 + \alpha^2)\, e^{-2\alpha\eta},$$

where Pr is the Prandtl number $\rho\,\nu\, c_p/\lambda$ and Ec is the Eckert number $U^2/c_p(T_0 - T_\infty)$. From (14) and (15), the boundary conditions for θ are

$$(17)\qquad \theta(0) = 0; \quad \theta(\infty) = 1$$

The solution of (16) subject to (17) is

$$(18)\quad \theta(\eta) = 1 - e^{-S.Pr.\eta} + \frac{Ec.Pr.(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha(2\alpha - S.Pr)}\cdot\left[e^{-2\alpha\eta} - e^{-S.Pr.\eta}\right] \text{ for } 2\alpha \neq S\cdot Pr\,;$$

$$= 1 - e^{-S.Pr.\eta}\left[1 + \frac{Ec(\alpha^2 + \beta^2)}{S} \cdot \eta\right] \text{ for } 2\alpha = S \cdot Pr.$$

From the temperature distribution given by (18), we can calculate q_w, the rate of heat transfer at the wall by $q_w = -\lambda(dT|dz)_{z=0}$. Introducing the Nusselt number $Nu = q_w\nu|U\lambda(T_0 - T_\infty)$ which is a dimensionless measure of the heat transfer coefficient, and evaluating q_w from (18), we get

$$Nu = Pr\left[S - \frac{Ec(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha}\right] \tag{19}$$

which holds both for $2\alpha \neq S \cdot Pr$ and $2\alpha = S \cdot Pr$.

Equation (19) shows that for $T_0 > T_\infty$, heat will flow from the plate to the fluid if

$$S > \frac{Ec(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha} \tag{20}$$

while heat will flow the fluid to the wall if

$$Ec > \frac{2\alpha S}{\alpha^2 + \beta^2} \tag{21}$$

and substitution for α and β from (11) in (21) yields

$$Ec > \frac{2\sqrt{2}}{[S^2 + (S^4 + 16E^2)^{1/2}]^{1/2}}. \tag{22}$$

Thus if (22) holds, heat will flow from the fluid to the wall even if the wall is at a higher temperature than the ambient fluid and this is due to the fact that even if $T_0 > T_\infty$, significant viscous dissipation will lead to a temperature field near the plate higher than that of the plate. For small values of Ec, however, the condition (20) shows that heat will flow from the plate to the fluid.

In the absence of rotation the above inequality becomes

$$Ec > 2. \tag{23}$$

Since

$$2\sqrt{2}\, S < 2[S^2 + (S^4 + 16E^2)^{1/2}]^{1/2}, \tag{24}$$

it follows from (22) and (23) that as Eckert number increases from zero, heat will flow from the fluid to the wall at a value of Eckert number smaller than the corresponding value in the absence of rotation. This is to be expected on physical grounds since in the presence of rotation, viscous dissipation of heat is larger than that in the absence of rotation and hence heat will flow from the fluid to the wall at a smaller value of Eckert number than that corresponding to the non-rotating case. Equation (19) further shows that there is no heat transfer to or from the plate if $2\alpha S = Ec(\alpha^2 + \beta^2)$.

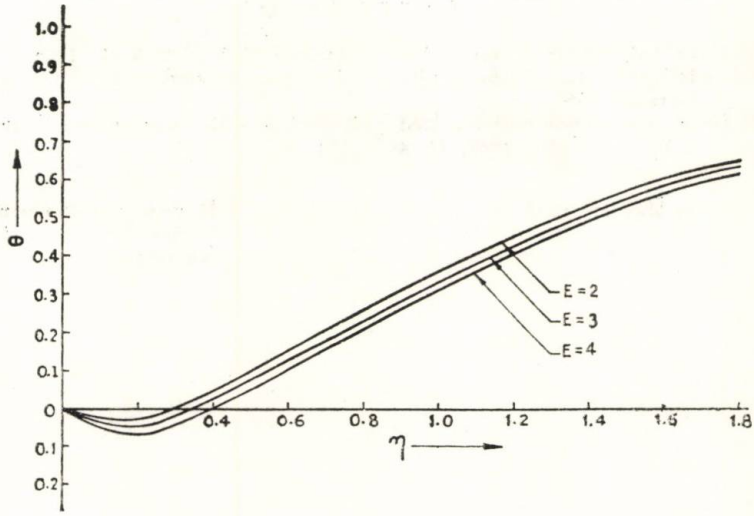


Fig. 1

We have plotted the dimensionless temperature $\theta(\eta)$ against η (with $Pr = \cdot 75$ and $Ec = 1$) for several values of the Ekman number corresponding to $S = 1$. It can be seen that very near the plate, $\theta < 0$ and this implies that near the plate, the fluid temperature $T > T_0$ for $T_0 > T_\infty$, as already explained. Further it is clear from the figure that very near the plate, temperature increases with the Ekman number while it decreases with increase in Ekman number further away from the plate.

4. DISCUSSION

It may be pointed out that a steady asymptotic solution for the energy equation as we have found here is possible only for the case of suction at the heated wall which is rotating with its infinite environment. This is due to the fact that conduction of heat away from wall is balanced by convection of heat towards the wall by suction. In the absence of suction, heat will continually flow towards infinity and the fluid far from the plate would be continually warmed by diffusive processes so that no steady solution will exist in this case. Although a steady asymptotic solution for velocity is possible in the Ekman layer over a porous plate subject to blowing, no steady temperature field is possible since in this case the fluid at infinity will be progressively heated both by diffusive processes and by convection of heat by blowing.

In the present problem which is physically realizable, the effect of gravity is neglected since it is expected that forced convection will be the basic mechanism of transfer of heat in comparison with free convection in the presence of gravity if we assume that temperature differences are small in the flow. This is also borne out from the study by Hudson [3] of heat transfer characteristics of a cooled non-porous disk rotating with its infinite environment.

REFERENCES

1. H. SCHLICHTING, Boundary layer theory, McGraw Hill, New York, 1960.
2. G. K. BATCHELOR, An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
3. J. L. HUDSON, Convection near a cooled disk rotating with its environment, Int. J. Heat and Mass Transfer, 1968, *11*, 407–414.

Received on May 15, 1972

Mathematics Department
Indian Institute of Technology
Kharagpur.

ASUPRA PROBLEMEI FOTOVÎSCOELASTICITĂȚII LINIARE

T. HUIDU

1. INTRODUCERE

Metoda fotoelasticității a devenit una din metodele experimentale de bază ale teoriei elasticității. În această metodă se utilizează ca modele unele materiale polimere transparente care se găsesc în starea zisă „înalt elastică" sau „sticloasă" sau de trecere de la o stare la alta. Materialele respective sînt inițial izotrope (optic și mecanic) și posedă suficient efect de birefringență cînd sînt supuse la solicitări relativ mici, astfel încît să dezvolte numai deformații elastice.

S-a constatat că există și materiale a căror deformație și birefringență variază în timp la sarcină și temperatură constante. Astfel de materiale le numim fotovîscoelastice liniar, sau — în particular — materiale care posedă fenomenul de fluaj liniar elastic. Într-o măsură mai mică există materiale polimere transparente care să posede suficientă birefrigență odată cu un domeniu apreciabil al deformațiilor plastice, atunci cînd sînt supuse la solicitări exterioare. Dacă domeniile deformațiilor elastice și plastice ale unor astfel de materiale birefringente sînt cam de același ordin de mărime, atunci cu ajutorul acestor materiale putem construi modelul fotoelastoplasticității. Dacă domeniul deformațiilor elastice este mult mai mic în comparație cu al deformațiilor plastice — astfel încît primele pot fi neglijate —, atunci cu astfel de materiale vom putea construi modelul fotoplasticității. Dacă, în plus, materialul polimer amintit ultima dată posedă deformații plastice care variază în timp odată cu birefringența la sarcină și temperatură constante, modelul generat este al fotovîscoplasticității. Se spune — în particular că un astfel de material posedă fotofluaj neliniar sau fotofluaj plastic.

Numeroase probleme din mecanica corpului solid deformabil (explozivi solizi, metale încălzite, materiale ceramice încălzite etc.) pot conduce la analiza tensiunilor și deformațiilor unui material vîscoelastic liniar. Analiza stării de tensiune a unor astfel de corpuri, care au în plus și niște contururi neregulate (deci dificultăți în privința condițiilor la limită), face uneori imposibilă tratarea prin metode pur matematice a acestor probleme. Problema devine accesibilă cercetării și rezolvării dacă se fac experiențe pe modele, obținîndu-se în acest fel unele informații asupra corpului de studiat.

În această lucrare ne vom ocupa de metoda fotovîscoelasticității liniare, sau — în particular — a fotofluajului liniar. Metoda amintită utilizează

cunoştinţe de optică, de mecanica polimerilor şi de electrodinamică (ecuaţiile lui Maxwell). Ecuaţiile constitutive ale metodei fotovîscoelasticităţii, utilizate aici, au fost obţinute pe bază de consideraţii teoretice şi experimentale, admiţîndu-se valabilitatea principiului suprapunerii lui Boltzman în cazul unei istorii continue a tensiunii şi deformaţiei.

Prima cercetare pur matematică de fotovîscoelasticitate liniară a fost făcută de Mindlin [1]. Ulterior problema a fost studiată şi de alţi cercetători care şi-au fundamentat intervenţiile lor luînd în consideraţie o cantitate apreciabilă de date experimentale. Printre cele mai importante lucrări în domeniul fotovîscoelasticităţii amintim lucrările lui E.H. Dill [2] şi mai recente ale lui I.I. Bugakov [3].

2. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE ALE VÎSCOELASTICITĂŢII LINIARE.

Ecuaţiile de echilibru în coordonate carteziene rectangulare x_1, x_2, x_3 sînt date de

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

unde indicele j după virgulă semnifică derivata parţială a tensorului simetric al tensiunii σ_{ij} în raport cu coordonata x_j, iar forţele masice f_i sînt neglijabile în marea majoritate a experienţelor.

Componentele tensorului deformaţie ε_{ij} sînt legate de componentele vectorului deplasare U_i $(i = 1, 2, 3)$ prin relaţiile cunoscute:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{j,i} + U_{i,j}). \tag{2}$$

În vîscoelasticitate, ca şi în teoria plasticităţii, pentru scrierea relaţiilor între tensiuni şi deformaţii se utilizează tensorii deviatori ai tensiunilor şi deformaţiilor. Cei doi tensori deviatori se definesc respectiv astfel:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{rr}\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{rr}\delta_{ij}, \tag{4}$$

unde $\sigma_{rr} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ şi δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, definit de relaţia:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

În cadrul acestor definiții, pentru materialul vîscoelastic liniar, izotop, în virtutea principiului suprapunerii al lui Boltzman, avem:

$$S_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau)\frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau, \tag{6}$$

$$\frac{1}{3}\,\sigma_{rr}(t) = \int_0^t K(t-\tau)\frac{d\varepsilon_{rr}(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{7}$$

Se știe că comportarea liniară a materialelor vîscoelastice poate fi reprezentată prin legi care conțin operatori liniari diferențiali sau integrali. În prezenta lucrare am considerat mai indicată scrierea legilor constitutive corespunzătoare sub formă integrală.

Inversele ecuațiilor (6) și (7) se scriu:

$$2e_{ij}(t) = \int_0^t I(t-\tau)\frac{dS_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{rr}(t) = \frac{1}{3}\int_0^t B(t-\tau)\frac{d\sigma_{rr}(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{9}$$

Condițiile de inversare a ecuațiilor (6) și (7) sînt date de exemplu în lucrarea [4].

Comportarea materialelor vîscoelastice liniar este caracterizată, în general, de funcțiile de timp $G(t)$ și $K(t)$ sau $I(t)$ și $B(t)$, care poartă următoarele denumiri:

$I(t)$ — funcția de fluaj la forfecare, sau complianța fluajului de forfecare,
$B(t)$ — funcția de fluaj de volum, sau complianța fluajului de volum,
$G(t)$ — funcția de relaxare la forfecare, sau modulul de relaxare la forfecare,
$K(t)$ — funcția de relaxare de volum, sau modulul de relaxare de volum.

Materialul fiind presupus de obicei omogen, toate aceste funcții de fluaj și de relaxare vor fi independente de coordonatele spațiale x_1, x_2, x_3, în timp ce mărimile tensoriale sînt funcții și de aceste coordonate, ceea ce urmează să se subînțeleagă tot timpul de aici înainte, deoarece pentru simplificarea scrierii, acest fapt nu l-am pus în evidență în mod expres.

Funcțiile de mai sus sînt legate între ele prin următoarele ecuații integrale de tip Volterra [4]:

$$\int_0^t G(t-\tau)\; I(\tau)\;\; d\tau = t, \tag{10}$$

$$\int_0^t K(t-\tau)\, B(\tau)\, \mathrm{d}\tau = t. \tag{11}$$

Importanța acestor ecuații constă în faptul că dacă, de exemplu, se dă $I(t)$ poate fi calculat $G(t)$, rezolvînd ecuația integrală (10) prin metode numerice [5], după cum vom vedea în paragraful următor.

Sistemul complet de ecuații, din care se determină soluția problemei vîscoelasticității liniare, este dat de ecuațiile (1) ÷ (4) și o pereche de relații tensiune ~ deformație, ca de exemplu (6) și (7), sau (8) și (9), la care se adaugă anumite condiții de contur. De obicei, componentele vectorului deplasare U_i

sînt date pe o parte a conturului, iar componentele vectorului tensiune F_i sînt date pe restul conturului. Se știe că vectorul tensiune F_i este legat de tensorul tensiune σ_{ij} prin relația

$$F_i = \sigma_{ij} n_j, \tag{12}$$

unde n_j sînt componentele vectorului unitar (versorului) al normalei la suprafața (conturul) corpului considerat.

3. DETERMINAREA FUNCȚIILOR DE FLUAJ ȘI DE RELAXARE.

În continuare vom vedea care funcții se pot determina experimental și care prin calcul. În experiențe o deosebită importanță o are considerarea cîmpului de tensiuni uniaxial, care este aproximat de o solicitare la tracțiune după o singură direcție. Deci, dacă $\sigma_{11} \neq 0$ în timp ce toate celelalte componente ale tensorului tensiune sînt nule, atunci componentele deviatorului tensiunii sînt date de

$$S_{11} = \frac{2}{3}\sigma_{11}, \quad S_{22} = -\frac{1}{3}\sigma_{11}, \quad S_{33} = -\frac{1}{3}\sigma_{11}, \tag{13}$$

celelalte componente ale deviatorului fiind nule. Totodată din relațiile (4), (8) și (9), în cazul cînd $\sigma_{11} = \sigma_0 H(t)$, $H(t)$ fiind funcția lui Heaviside (toți ceilalți $\sigma_{ij} = 0$), rezultă [6]:

$$\varepsilon_{11}(t) = \sigma_0 \left[\frac{I(t)}{3} + \frac{B(t)}{9}\right], \tag{14}$$

$$\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = \sigma_0 \left[-\frac{I(t)}{6} + \frac{B(t)}{9}\right]. \tag{15}$$

Definind — din motive experimentale — funcția (complianța) de fluaj la întindere prin relația:

$$D(t) = \frac{\varepsilon_{11}(t)}{\sigma_0} \tag{16}$$

și coeficientul lui Poisson la fluaj axial de întindere, prin relația

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{22}(t)}{\varepsilon_{11}(t)}. \tag{17}$$

Se obțin următoarele relații care leagă între el funcțiile I, B, D și ν:

$$D(t) = \frac{1}{3} I(t) + \frac{1}{9} B(t), \tag{18}$$

$$\nu(t) = \frac{3I(t) - 2B(t)}{6I(t) + 2B(t)}. \tag{19}$$

Relațiile (18) și (19) devin:

$$I(t) = 2[1 + \nu(t)] \cdot D(t), \tag{20}$$

$$B(t) = 3[1 - 2\nu(t)] \cdot D(t). \tag{21}$$

Totodată, din aceste două relații se obține relația:

$$B(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \nu(t)}{1 + \nu(t)} \cdot I(t).$$

Rezultă faptul că funcțiile de fluaj de volum $B(t)$ și de forfecare $I(t)$, pot fi calculate din funcțiile $D(t)$ și $\nu(t)$, care sînt obținute experimental printr-o solicitare la fluaj de tracțiune după o singură direcție cu ajutorul formulelor (16) și (17). Obținerea, mai departe, a funcțiilor de relaxare $G(t)$ și $K(t)$ se face, așa cum vom vedea mai jos, prin integrarea numerică a ecuațiilor integrale (10) și (11).

Inainte de a trece la rezolvarea ecuațiilor integrale amintite, trebuie să scoatem în evidență faptul că, în mod analog cu starea de tensiune și de deformație complexă, în cazul solicitării de întindere după o direcție are loc relația

$$\sigma_{11}(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{22}$$

și inversa acesteia

$$\varepsilon_{11}(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau. \tag{23}$$

Funcția de relaxare la tracțiune $E(t)$ este legată de funcția de fluaj $D(t)$, care se determină experiemental cu ajutorul lui (16), verifică ecuația integrală

$$\int_0^t E(t - \tau) D(\tau) d\tau = t. \tag{24}$$

Trebuie să mai observăm că la definirea coeficientului de contracție laterală $\nu(t)$ este necesar să se țină seama de natura solicitării, dacă solicitarea uniaxială este de fluaj atunci notăm contracția laterală cu $\nu_f(t)$, iar dacă solicitarea este de relaxare vom nota funcția respectivă de contradicție cu $\nu_r(t)$. Aceste două mărimi sînt definite prin relațiile [7]:

$$-\varepsilon_{22}(t) = \int_0^t \nu_f(t - \tau) D(t - \tau) \frac{d\sigma_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{25}$$

$$-\varepsilon_{22}(t) = \int_0^t \nu_r(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{26}$$

În principiu $\nu_f(t) \neq \nu_r(t)$ și pot fi exprimate prin relațiile:

$$\nu_f(t) = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{I_0}{D(t)} - 1\right] + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dI(t - \tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{D(\tau)} d\tau, \tag{27}$$

$$\nu_r(t) = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{E_0}{G(t)} - 1\right] + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dE(t - \tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{G(\tau)} d\tau. \tag{28}$$

unde I_0 şi E_0 sînt funcţiile $I(t)$ şi $E(t)$ la momentul $t = 0$. Între cei doi coeficienţi de contracţie laterală există relaţia:

$$\int_0^t \nu_r(t-\tau)\,\nu_f^{-1}(\tau)\,d\tau = t. \tag{29}$$

Rezolvarea ecuaţiilor integrale Volterra, de tipul lui (24) sau (29) de exemplu, prin metode numerice obişnuite (de pildă metoda trapezelor), a arătat că se ajunge la erori apreaciabile ale valorilor funcţiilor de sub integrală. Aceasta se întîmplă din cauza că funcţia cunoscută (de exemplu $D(t)$) este obţinută experimental pentru axa timpilor t împărţită în diferite intervale finite, iar valorile corespunzătoare obţinute (ale lui $D(t)$) nu dau naştere la o funcţie netedă peste tot. Din această cauză, dacă procedeul numeric nu este ales cu prudenţă, el conduce la erori mari. Procedeul numeric al lui Hopkins şi Hamming [5], de determinare a lui $E(t)$ cînd $D(t)$ este cunoscut experimental, s-a dovedit a fi mai bun decît procedeele obişnuite. Dăm mai jos în rezumat conţinutul metodei autorilor amintiţi.

Dacă notăm cu $\varphi(t)$ funcţia de fluaj şi cu $\Psi(t)$ funcţia de relaxare, se ştie că ele satisfac ecuaţiile integrale:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\Psi(\tau)\,d\tau = t, \tag{30}$$

$$\int_0^t \varphi(t)\cdot\Psi(t-\tau)\,d\tau = t. \tag{31}$$

Să introducem funcţia:

$$f(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau, \tag{32}$$

astfel încît $f(0) = 0$ şi $f'(\tau) = \varphi(\tau)$ şi presupunem că $f(\tau)$ nu se anulează pentru nici un $\tau > 0$.

Să notăm cu t_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ timpii pentru care funcţia $\varphi(t)$ este dată şi să presupunem că $\varphi(t) = \text{const.}$ în intervalele $[t_i, t_{i+1}]$, iar $t_0 = 0$.

Pentru calculul lui $f(t)$ se foloseşte formula:

$$f(t_{n+1}) = f(t_n) + \frac{1}{2}[\Psi(t_{n+1}) + \Psi(t_n)]\cdot(t_{n+1} - t_n). \tag{33}$$

Din (30) avem:

$$t_{n+1} = \int_0^{t_{n+1}} \Psi(\tau)\,\varphi(t_{n+1}-\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Psi(\tau)\,(t_{n+1}-\tau)\,d\tau. \tag{34}$$

Se face aproximaţia

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Psi(\tau)\cdot\varphi(t_{n+1}-\tau)\,d\tau = \Psi(t_{i+\frac{1}{2}})\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_{n+1}-\tau)\,d\tau =$$

$$= -\Psi(t_{i+\frac{1}{2}})\,[f(t_{n+1}-t_{i+1}) - f(t_{n+1}-t_i)],$$

unde

$$t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$$

și avem:

$$t_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} \Psi(t_{i+\frac{1}{2}})\,[f(t_{n+1} - t_{i+1}) - f(t_{n+1} - t_i)] + \Psi(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot f(t_{n+1} - t_n)$$

și rezolvînd în raport cu $\Psi(t_{n+\frac{1}{2}})$ se obține:

$$\Psi(t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{t_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \Psi(t_{i+\frac{1}{2}})\,[f(t_{n+1} - t_i) - f(t_{n+1} - t_{i+1})]}{f(t_{n+1} - t_n)}, \tag{35}$$

relație care permite calculul lui $\Psi(t)$ cînd este cunoscut $\varphi(t)$ în punctele $t_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Evident avem:

— pentru $n = 0$: $\Psi(t_{\frac{1}{2}}) = \Psi_{\frac{1}{2}} = \dfrac{t_1}{f(t_1)}$.

— pentru $n = 1$: $\Psi(t_{\frac{3}{2}}) = \Psi_{\frac{3}{2}} = \dfrac{t_2 - \Psi(t_{\frac{1}{2}})[f(t_2 - t_0) - f(t_2 - t_1)]}{f(t_2 - t_1)}$

ș.a.m.d.

Considerăm că a fost realizat scopul acestui paragraf de a prezenta un ansamblu de instrumente care să permită determinarea tuturor funcțiilor de fluaj și de relaxare folosind o experiență la întindere axială de fluaj după o singură direcție. Exemple concrete vor fi prezentate într-o lucrare următoare.

O ultimă observație se impune a se face la încheierea acestui paragraf, și anume aceea că teoria materialelor elastice se poate obține ca un caz particular al vîscoelasticității liniare punînd

$$I(t) = I_0 H(t) \quad \text{și} \quad B(t) = B_0 H(t), \tag{36}$$

unde $H(t)$ este funcția lui Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ 1 & \text{„} \quad t > 0. \end{cases} \tag{37}$$

În mod analog se pune

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0 H(t), \quad D(t) = D_0 H(t), \\ K(t) &= K_0 H(t), \quad E(t) = E_0 H(t), \end{aligned} \tag{38}$$

și deoarece $B_0 = \frac{1}{K_0}$ și $D_0 = \frac{1}{E_0}$, se obțin relațiile cunoscute între constantele G_0, E_0, ν_0 și K_0

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}, \quad K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}, \tag{39}$$

iar sistemul de ecuații al vîscoelasticității liniare se transformă în binecunoscutul sistem de ecuații al elasticității liniare. De exemplu, ecuațiile integrale (6) și (7) devin

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2G_0 e_{ij}, \\ \frac{1}{3}\sigma_{rr} &= K_0 \varepsilon_{rr}, \end{aligned} \tag{40}$$

ecuații cunoscute din elasticitatea clasică.

4. FENOMENE OPTICE CARE SE PRODUC ÎN POLIMERI VÎSCOELASTICI

Este cunoscut faptul că în fotoelasticitatea bidimensională, legea cantitativă care stabilește legătura dintre mărimile optice (diferența de drum optic δ) și mărimile mecanice (diferența tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$) este dată de o relație liniară de forma:

$$\delta = A(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{41}$$

unde A este o cantitate constantă pentru același material de aceeași grosime h (h fiind, de fapt, drumul parcurs de raza luminoasă monocromatică în mediul birefringent), iar δ este legată de diferența indicilor principali de refracție prin relația

$$\delta = h(N_1 - N_2). \tag{42}$$

De observat faptul că în lucrările de specialitate (de ex. [8, 9]) se folosește și noțiunea de diferență de fază Δ, care este legată de diferența de drum optic prin ecuația

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\delta, \tag{43}$$

unde λ este lungimea de undă a sursei monocromatice utilizată. Uneori este folosită noțiunea de birefringență N care este definită ca diferența de drum optic pentru grosimea h a stratului de polimer egală cu unitatea, adică

$$N_1 - N_2 = \frac{\delta}{h} = N. \tag{44}$$

Relațiile (42), (43) și (44) ilustrează legătura dintre diversele mărimi optice utilizate în diverse lucrări de fotomecanică.

S-a constatat că dacă se iau în considerație și fenomenele vîscoelastice, adică dacă supunem la o stare de solicitare constantă o epruvetă dintr-un material polimer, care posedă și un suficient efect de birefrigență, diferența de drum optic variază în timp odată cu variația deformațiilor (vezi de ex. [10]) cu toate că tensiunile rămîn constante, ceea ce a condus la înlocuirea relației (41) prin relația [11]:

$$\delta = A(\sigma_1 - \sigma_2) + B(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{45}$$

Această dependență descrie mai bine fenomenul optico-mecanic decît dependența (41), motiv pentru care ea a fost utilizată de mulți cercetători și în cazul deformării neelastice a unor polimeri [12, 13, 14].

Pentru găsirea unei dependențe între mărimile optice și cele mecanice, care să fie valabilă pentru toate corpurile polimere birefrigente, este necesară o analiză mai amănunțită a fenomenului. Trebuie plecat de la observația că întrucît mărimile mecanice sînt reprezentate prin tensorii tensiune σ_{ij} și deformației ε_{ij}, iar mărimea optică din ecuațiile de mai sus este reprezentată de o cantitate scalară numită diferență de drum optic δ sau diferență de fază Δ, este deci natural ca să se considere și pentru fenomenul optic o mărime tensorială pe care s-o numim — la început — tensorul permitivității dialectrice $\mathcal{H}_{ij}$.

a) **Legătura birefringenței cu permitivitatea dielectrică**

Ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii (ecuațiile lui Maxwell) în cazul undelor plane monocromatice, trecînd prin dielectrici nesolicitați la forțe exterioare (dielectrici izotropi din punct de vedere optic și mecanic), au forma [15]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial D_i}{\partial t} &= \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_k}, \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t} &= \frac{\partial E_k}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_k}, \qquad (i \neq j \neq k \neq i) \end{aligned} \tag{46}$$

unde

H_i — componentele intensității cîmpului magnetic,
B_i — „ inducției magnetice,
E_i — „ intensității cîmpului electric,
D_i — „ inducției electrice,
c — viteza luminii în vid,

iar sistemul de unități utilizat fiind cel al lui Gauss.

La cele șase ecuații (46), care leagă 12 mărimi, se adaugă încă șase ecuații de stare: trei ecuații leagă pe B_i cu H_i și trei pe D_i cu E_i, în felul următor.

Pentru dielectrici nemagnetici

$$B_i = \mu H_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{47}$$

permeabilitatea magnetică μ fiind o mărime scalară, pentru majoritatea mediilor (uneori $\mu = 1$), direcțiile vectorilor B_i și H_i coincid în acest caz.

Dacă mediul este izotrop în raport cu proprietățile optice, D_i și E_i sînt legați cu ajutorul permitivității dialectrice $\mathcal{H}_0$ a substanței, reprezentînd în acest caz o mărime scalară, prin relația

$$D_i = \mathcal{H}_0 E_i. \quad (i = 1, 2, 3) \tag{48}$$

În aceste ipoteze direcțiile vectorilor de componente E_i și D_i coincincid.

Dacă mediul dielectric este anizotrop în raport cu proprietățile lui optice, atunci direcțiile vectorilor de componente E_i și D_i, în general nu coincid, legătura dintre ele realizîndu-se cu ajutorul tensorului permitivității dielectrice $\mathcal{H}_{ij}$, care este un tensor simetric, bivalent

$$D_i = \mathcal{H}_{ij} E_j. \quad (i = 1,2,3) \tag{49}$$

Uneori acest tensor se numește simplu-tensorul dielectric. Relația (49) caracterizează o clasă vastă de cristale și dielectrici inițial deformați. Anizotropia optică este legată de ordinea de așezare a microparticulelor. În dielectrici inițial izotropi — cazul nostru — o astfel de ordine se referă la anizotropia datorată stării de tensiune și de deformație, anizotropia fiind caracterizată de axele principale ale acestor stări provocate.

Ecuațiile (46), (47) și (48) sau (49) reprezintă un sistem complet de ecuații în raport cu variabilele E_i, D_i, H_i și B_i, care descriu propagarea undelor electromagnetice în medii ale căror proprietăți concrete se determină din ecuațiile (47), și (48) sau (49). În cazul mediului optic izotrop, adică aplicînd (48), din sistemul de ecuații amintit rezultă că lumina care se propagă cu o viteză de fază $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu \mathcal{H}_0}}$ are indicele de refracție al mediului $N_0 = \frac{c}{v_0} = \sqrt{\frac{\mathcal{H}_0}{\mathcal{H}}}$, unde $\mathcal{H}$ este permitivitatea dielectrică în vid. În cazul mediului optic anizotrop, adică aplicînd (49), din sistemul de ecuații rezultă că lumina care se propagă în mediu (cazul plan) se împarte în două unde polarizate în plane reciproc perpendiculare. Planele de polarizație ale undei coincid cu direcțiile cvaziprincipale ale permitivității dielectrice $\mathcal{H}_1$ și $\mathcal{H}_2$. Undele se mișcă cu vitezele de fază $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu \mathcal{H}_1}}$ și $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu \mathcal{H}_2}}$, iar indicii lor de refracție sînt $N_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}}}$, $N_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}}}$, unde $\mathcal{H} = 1$.

Din ecuațiile (46), (47) și (49) rezultă că în cazul problemei plane, diferența de fază a undei, avînd normala comună la undă situată pe lungimea h a drumului frontului de undă, este legată de diferența permitivității dielectrice prin relația

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (\sqrt{\mathcal{H}_1} - \sqrt{\mathcal{H}_2}), \tag{50}$$

unde diferența de fază este direct proporțională cu diferența rădăcinilor pătrate ale valorilor permitivității dielectrice cvaziprincipale și cu lungimea drumului frontului de undă h, și invers proporțională cu lungimea de undă.

În cazul problemei spațiale, adică atunci cînd cîmpul $\mathcal{H}_{ij}$ variază de-a lungul normalei la undă, se obțin alte ecuații după cum se arată în [12].

Ecuația (50) ca și ecuațiile corespunzătoare pentru cazul spațial, sînt corecte pentru orice mediu anizotrop din punct de vedere optic, independent de cauzele care provoacă anizotopia optică (biregringența naturală, birefringența artificială: efectele piezooptic, electrooptic, magnetooptic).

Pentru a stabili dependența dintre birefringența artificială și cauza care a provocat-o, este necesar a se stabili dependența dintre permitivitatea dielectrică și cauza amintită, iar apoi să se introducă această dependență în relația (50).

b) **Legătura permitivității dielectrice cu mărimile mecanice**

După cum rezultă din relația (50), diferența de fază apare ca rezultat al trecerii luminii printr-un mediu a cărui permitivitate dielectrică este o mărime nescalară. Efectul piezooptic provoacă variația permitivității dielectrice prin influențe mecanice. Prin teoria efectului piezootpic în lucrarea [16] s-a studiat — printre altele — și forma legăturii naturale existentă între permitivitatea dielectrică și mărimile mecanice. Stabilirea acestei legături s-a făcut pe baza datelor experimentale. Considerații teoretice privind forma legăturii amintite se găsesc în lucrare [17]. Așa cum am amintit mai înainte, birefringența variază în timp la tensiuni și temperaturi constante, iar după descărcarea completă a epruvetelor birefringența nu dispare total [3], ceea ce înseamnă că permitivitatea dielectrică nu este legată numai de tensiuni — cum se admite de obicei în teoria efectului piezooptic pentru mediul elastic. Experimental a fost stabilit [12, 16] că dependența de bază dintre permitivitatea dielectrică a mediului inițial optic izotrop și mărimile mecanice este dată de:

$$\mathcal{H}_{ij} = (\mathcal{H}_0 + A)\,\delta_{ij} + A_\sigma \sigma_{ij} + A_\varepsilon \varepsilon_{ij}, \tag{51}$$

unde δ_{ij} este tensorul unitar al lui Kronecker definit de (5), $\mathcal{H}_0$ este permitivitatea dielectrică a mediului în stare naturală nedeformată, A este o funcție scalară de invarianții mărimilor mecanice și de alte variabile. Cînd tensiunile și deformațiile sînt nule trebuie ca $A = 0$. Se va vedea mai jos că structura lui A nu influențează birefringența. A_σ și A_ε sînt coeficienți scalari ai mediului concret. Ei depind de frecvențele vibrațiilor luminii care trece, de temperatură, de vîrsta mediului și de parametrul care caracterizează ordinul de mărime al vitezei de deformare (timpul de acțiune). În cazurile cele mai generale, A_σ și A_ε depind și de invarianții mărimilor mecanice, dar pînă la anumite valori ale tensiunilor σ_{ij} și deformațiilor ε_{ij} o astfel de dependență poate fi neglijată. Deci vom considera că σ_{ij} și ε_{ij} variază în limitele arătate.

S-a arătat că este posibil cazul cînd sau $A_\sigma = 0$, sau $A_\varepsilon = 0$. În aceste cazuri $\mathcal{H}_{ij}$ este legat, respectiv, sau numai de deformații sau numai de tensiuni. Dacă $A_\sigma \neq 0$ și $A_\varepsilon \neq 0$, atunci $\mathcal{H}_{ij}$ este legat și de tensiuni și de deformații. În acest ultim caz, pentru a exprima pe $\mathcal{H}_{ij}$ numai funcție de tensiuni sau numai funcție de deformații, trebuie să se considere relația

dintre tensiuni și deformații care descrie comportarea mecanică a mediului respectiv și să se înlocuiască în relația (51) sau deformațiile în funcție de tensiuni, sau tensiunile funcție de deformații.

c) **Legătura birefrigenței cu mărimile mecanice.**

S-a văzut mai sus că planele de polarizare ale undei care se propagă în mediul optic anizotrop, coincid cu direcțiile cvaziprincipale ale permitivității dielectrice $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$. Din (51) decurge legătura pozițiilor planelor de polarizare ale undei cu direcțiile cvaziprincipale ale mărimilor mecanice. Dacă se consideră că $A_\sigma \neq 0$ și $A_\varepsilon \neq 0$ și că direcțiile cvaziprincipale ale lui σ_{ij} și ε_{ij} sînt aceleași, adică

$$\varepsilon_{12} = 0 \quad \text{pentru } \sigma_{12} = 0, \tag{52}$$

din (51) urmează că în același timp și $\mathcal{H}_{12} = 0$, adică planul de polarizație al undei din cazul problemei plane, determină în același timp și direcțiile cvaziprincipale ale lui σ_{ij} și ε_{ij}. Aceasta înseamnă că parametrul „izoclinei optice" și parametrul „izoclinei mecanice" au aceeași valoare într-un punct dacă sînt îndeplinite, de exemplu, una din următoarele situații: mediul elastic izotrop, mediul elastic anizotrop, cînd simetria stării de tensiune coincide cu simetria anizotropiei, medii neelastice inițial izotrope, cînd tensiunile principale nu se rotesc în procesul încărcării.

În acele cazuri cînd condițiile (52) nu sînt îndeplinite, planele de polarizare ale undei nu coincid nici cu direcțiile cvaziprincipale ale lui σ_{ij}, nici cu direcțiile cvaziprincipale ale lui ε_{ij}. S-a arătat că, de exemplu, în cristale cu rețele cubice, direcțiile cvaziprincipale ale lui $\mathcal{H}_{ij}$ și σ_{ij}, în general, nu coincid (adică, acolo pentru $\sigma_{12} = 0$ rezultă $\mathcal{H}_{12} \neq 0$).

Se arată că dacă sînt adevărate condițiile (52) atunci în cazul problemei plane se obțin relațiile cunoscute ale lui Fillon și Jessop

$$\Delta = \frac{\pi h}{\lambda \sqrt{\mathcal{H}_0}} [A_\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) + A_\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]. \tag{53}$$

Aceasta înseamnă că tabloul de benzi de interferență numite izocromate, în cazul problemei plane, pentru h = const, reprezintă locul geometric al punctelor pentru care are loc relația

$$A_\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) + A_\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \text{const}.$$

Evident că dacă se consideră valabilă legea lui Hooke, din care avem

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2G}(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{54}$$

atunci relația (53) capătă forma cunoscută din fotoelasticitatea bidimensională clasică:

$$\Delta = \frac{2\pi hC}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{55}$$

unde constanta C a materialului modelului este dată de

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{H}_0}}\left(A_\sigma + \frac{1}{2G} A_\varepsilon\right). \tag{56}$$

Se observă ușor că legătura diferenței de fază Δ cu diferența tensiunilor cvaziprincipale $(\sigma_1 - \sigma_2)$, pentru acele medii care au alte comportări mecanice decît comportarea elastică clasică, este de formă diferită decît cea din (55). Formarea acestei legături depinde de forma relației dintre tensiuni și deformații pentru mediul concret studiat.

În acele cazuri cînd direcțiile cvaziprincipale ale lui σ_{ij} și ε_{ij} nu sînt aceleași, se arată că Δ va fi funcție nu numai de diferența valorilor cvaziprincipale $\sigma_1 - \sigma_2$ și $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, dar și de însăși valorile cvaziprincipale ale tensorilor σ_{ij} și ε_{ij}.

Pe baza ecuației (51) se poate face și o clasificare a dielectricilor după proprietățile lor piezooptice. Se pleacă de la faptul că coeficienții A_σ și A_ε pot avea aceleași semne sau semne contrare în funcție de compoziția chimică și de structura materialului polimer respectiv. Unul din coeficienții A_σ sau A_ε poate fi presupus zero dacă ultimii doi termeni din relația (51) se deosebesc esențial ca valoare. Autorul lucrării [12] indică existența a patru clase piezooptice cărora le corespund diverse stări mecanice. Cele patru clase piezooptice se referă la următoarele patru situații: $A_\sigma = 0$, $A_\varepsilon = 0$, $A_\sigma \cdot A_\varepsilon > 0$ și $A_\sigma \cdot A_\varepsilon < 0$. Apartenența materialului la una sau alta din aceste clase piezooptice se determină în funcție de rezultatele măsurătorilor optice pe modele polimere solicitate.

Considerațiile făcute în acest paragraf pot fi folosite la scrierea ecuațiilor fotovîscoelasticității liniare. Considerăm, însă, mult mai potrivit din punct de vedere matematic și practic ca scrierea acestor ecuații să se facă folosindu-se operatorii liniari integrali, așa cum s-a procedat în paragraful 2 la scrierea ecuațiilor vîscoelasticității liniare. Avantajul acestui mod de abordare a problemei se va vedea la momentul potrivit.

De o importanță deosebită pentru metoda fotovîscoelasticității sînt și lucrările [18,19].

5. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE FOTOVÎSCOELASTICITĂȚII LINIARE

În paragraful precedent s-a arătat că mulți cercetători au dovedit experimental faptul că unii polimeri transparenți, utilizați în fotomecanică, posedă fenomenul de birefringeță care depinde de istoria deformației. Această observație sugerează existența unor dependențe între un tensor care măsoară efectul optic și tensorul deformație (sau tensorul tensiune) similară cu dependența dintre tensorii tensiune și deformație din vîscoelasticitatea liniară.

Ca tensor al mărimilor optice se utilizează, de obicei, în literatura de specialitate, următoarele denumiri [2,3]: tensorul dielectric notat cu $\mathcal{H}_{ij}$ (sau

cu K_{ij}), tensorul indicilor de refracţie N_{ij}, tensorul de refracţie al lui Fresnel n_{ij}, toţi aceşti tensori fiind legaţi între ei prin relaţiile:

$$n_{ij} = \mathcal{H}_{ij}^{-1} \quad \text{şi} \quad N_{ij} = \mathcal{H}_{ij}^{1/2}. \tag{57}$$

Valorile principale ale tensorului N_{ij} coincid cu indicii principali de refracţie, iar diferenţa valorilor principale coincide cu birefringenţa

$$N = N_1 - N_2 = \sqrt{\mathcal{H}_1} - \sqrt{\mathcal{H}_2}. \tag{58}$$

Ţinînd seama de relaţiile (42) şi (43) se pot stabili relaţii de legătură ale birefringenţei N cu diferenţa de drum optic sau cu diferenţa de fază:

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda}(N_1 - N_2) = \frac{2\pi h N}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta, \tag{59}$$

unde h este grosimea stratului de polimer prin care trece raza de lumină monocromatică polarizată de lungimea de undă λ.

Întrucît mărimile optice N, Δ şi δ din relaţiile de mai sus nu sînt mărimi tensoriale, ele nu pot fi utilizate de la început pentru stabilirea legăturii lor cu tensorii mărimilor mecanice, în vederea stabilirii ecuaţiilor constitutive vîsco-elasto-optice (sau reo-optice).

În mod analog cu procedeul folosit în paragraful 2, definim şi aici tensorul deviator al tensorului de refracţie prin relaţia

$$R_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{3} N_{rr}\delta_{ij}, \tag{60}$$

iar relaţiile integrale dintre acest tensori şi tensorul deviator al tensiunilor, în baza principiului lui Boltzmann şi a celorlalte ipoteze admise anterior, se scriu:

$$R_{ij}(t) = \int_0^t \bar{I}(t-\tau)\frac{\mathrm{d}S_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{61}$$

$$R(t) = R_{rr}(t) = \int_0^t \bar{B}(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{62}$$

unde $\bar{I}(t)$ şi $\bar{B}(t)$ sînt funcţii de fluaj optic de forfecare şi respectiv de volum, spre deosebire de funcţiile de fluaj mecanic $I(t)$ şi $B(t)$ descrise anterior

Relaţiile analoge pot fi scrise între tensorul deviator de refracţie şi tensorul deviator de deformaţie iar funcţiile respective vor fi numite funcţii de relaxare optică.

Considerînd cazul unei solicitări după o singură direcţie ($\sigma_{11}(t) = \sigma_0 \cdot H(t)$, $H(t)$ fiind funcţia lui Heaviside, toate celelalte componente $\sigma_{ij} = 0$), din relaţiile (60), (61), şi (62) rezultă

$$N_{11}(t) = \frac{\sigma_0}{3}\left[2\bar{I}(t) + \frac{1}{3}\bar{B}(t)\right], \tag{63}$$

$$N_{22}(t) = \frac{\sigma_0}{3}\left[-\bar{I}(t) + \frac{1}{3}\bar{B}(t)\right], \tag{64}$$

și prin urmare birefringența

$$N(t) = N_{11}(t) - N_{22}(t) = N_1(t) - N_2(t) = \sigma_0 \bar{I}(t) \tag{65}$$

Din cauză că în expresia birefrigenței nu apare și funcția $\bar{B}(t)$, vom nota $\bar{I}(t) = C_\sigma(t)$ și numim această mărime funcție optică de tensiune sau funcție optică de fluaj și atunci avem:

$$C_\sigma(t) = \frac{N(t)}{\sigma_0}, \tag{66}$$

iar în locul ecuațiilor integrale (61) și (62) putem considera relația

$$R_{ij}(t) = \int_0^t C_\sigma(t-\tau) \frac{dS_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{67}$$

și o relație similară între deviatorul tensorului de refracție și deviatorul tensorului deformație

$$R_{ij}(t) = \int_0^t C_\varepsilon(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{68}$$

unde $C_\varepsilon(t)$ este funcția optică de deformație sau funcția optică de relaxare. Facem observația că tensorul R_{ij}, ca și tensorii S_{ij} și e_{ij}, nu depinde numai de timp, ci și de coordonatele spațiale x_1, x_2, x_3, dependență ce nu o punem în evidență în mod expres pentru simplificarea scrierii.

Considerînd inversele ecuațiilor (67) și (68) obținem respectiv

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \mathcal{C}(t-\tau) \frac{dR_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{69}$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\varepsilon(t-\tau) \frac{dR_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{70}$$

unde funcțiile $\mathcal{C}_\sigma(t)$ și $\mathcal{C}_\varepsilon(t)$ le numim funcții optice inverse de fluaj și respectiv de relaxare. Ele sînt legate respectiv de $C_\sigma(t)$ și $C_\varepsilon(t)$ prin niște relații integrale, așa cum se va vedeam mai tîrziu.

Din (69) urmează că

$$S_{11}(t) - S_{22}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [R_{11}(\tau) - R_{22}(\tau)] d\tau, \tag{71}$$

$$S_{12}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t-\tau) \frac{d}{d\tau} R_{12}(\tau) d\tau. \tag{72}$$

În virtutea caracterului tensorial al mărimilor S_{ij} și R_{ij} și notînd cu ξ unghiul pe care îl face σ_1 cu axa x_1, iar cu ζ unghiul pe care îl face N_1 cu aceeași axă x_1, avem

$$S_{11} - S_{22} = \sigma_{11} - \sigma_{22} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\xi, \tag{73}$$

$$S_{12} = \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\xi, \tag{74}$$

și respectiv

$$R_{11} - R_{22} = N_{11} - N_{22} = (N_1 - N_2) \cos 2\zeta = N \cos 2\zeta, \tag{75}$$

$$R_{12} = N_{12} = \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\zeta = \frac{N}{2} \sin 2\zeta. \tag{76}$$

În relațiile de mai sus, (73) ÷ (76), ξ se numește parametrul „izoclinei mecanice" deoarece indică direcția tensiunii principale σ_1 în planul (x_1, x_2), pe cînd ζ se numește parametrul „izoclinei optice", întrucît indică direcția lui N_1 în același plan. În general trebuie ca $\xi \neq \zeta$.

Înlocuind (73) și (75) în (71), iar (74) și (76) în (72) se obține

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \cos 2\xi(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [N(\tau) \cos 2\zeta(\tau)] \, d\tau, \tag{77}$$

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \sin 2\xi(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [N(\tau) \sin 2\zeta(\tau)] \, d\tau. \tag{78}$$

Relațiile (77) și (78) pot fi utilizate la determinarea diferenței tensiunilor principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$ și a orientării axelor principale ξ în orice punct și la orice moment al intervalului de timp considerat, dacă se cunoaște din experiențe istoria birefringenței $N(t)$ și unghiul izoclinei optice $\zeta(t)$ în același punct la incidența normală prin stratul de polimer a luminii monocromatice polarizată.

Axele principale ale tensiunii și deformației, adică parametrul ξ, coincide cu unghiul izoclinei propriuzise ζ, dacă și numai dacă unghiul izoclinei este constant în timp, pentru același punct din planul (x_1, x_2). În caz contrar toate cele trei direcții principale ale celor trei tensori σ_{ij}, ε_{ij} și N_{ij} sînt diferite între ele ca valoare.

Cînd unghiul izoclinei este independent de timp ($\zeta(t) = \text{const}$), atunci $\zeta = \xi$ și ecuațiile (77) și (78) devin

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t - \tau) \frac{dN(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{79}$$

și inversa ei

$$N(t) = \int_0^t C_\sigma(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] \, d\tau. \tag{80}$$

Între cele două funcții optice de tensiune există relația

$$\int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t - \tau) \, C_\sigma(\tau) \, d\tau = t. \tag{81}$$

O relație similară cu (81) se poate scrie și pentru cele două funcții optice de deformație $\mathcal{C}_\varepsilon$ și C_ε.

În cazul incidenței oblice a luminii se obțin relații diferite de cele obținute mai sus, relații care pun în evidență și unghiul sub care cade raza de lumină pe stratul de polimer birefringent.

Observație. În cazul în care se scrie și relația pentru deformații, similară relației (79), atunci este necesar a se face distincția între birefringența datorită tensiunii $N_\sigma(t)$ și birefringența datorită deformației $N_\varepsilon(t)$. Corespunzător acestor două situații relația (79) se scrie mai corect astfel

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \int_0 \mathcal{C}^\sigma(t-\tau)\,\frac{dN_\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau \tag{79'}$$

și relația corespunzătoare pentru diferența deformațiilor principale

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\varepsilon(t-\tau)\,\frac{dN_\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{82}$$

6. DETERMINAREA FUNCȚIILOR OPTICE DE FLUAJ ȘI DE RELAXARE.

Să considerăm un aparat care produce lumină polarizată (un polaris cop) și să introducem între polaroizii lui o plăcuță de material polimer-transparent, vîscoelastic liniar, mărginită de planele $x_3 = 0$ și $x_3 = h$. Axa x_3 este o axă principală a tensorului $\mathcal{H}_{ij}$ și reprezintă direcția după care se propagă raza de lumină monocromatică polarizată.

Analizîndu-se fenomenul optic produs în urma solicitării materialului polimer amintit la forțe exterioare, se găsește că la ieșire din analizorul polariscopului intensitatea undei luminoase I este proporțională cu un produs de factori, dintre care numai doi sînt mai importanți[8,9]:

$$I \approx \sin^2 2\zeta \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}\cdot \tag{83}$$

În această relație ζ reprezintă unghiul pe care îl face planul de vibrație al analizorului cu una din direcțiile principale de birefringență (de exemplu cu N_1),.δ este diferența de drum optic a celor două vibrații ce iau naștere la trecerea luminii prin plăcuța birefringentă de grosimea h, iar λ este lungimea de undă a sursei de lumină monocromatică folosită. De observat că în planul x_1Ox_2 atît ζ, care se numește și parametrul izoclinei, cît și δ sînt funcții de coordonatele (x_1,x_2) și de timpul t, întrucît s-a presupus că materialul polimer considerat are din punct de vedere mecanic o comportare vîscoelastică liniară.

Se știe că cele două fenomene optice principale, pentru care se produce condiția de extincție a luminii la ieșirea ei din analizor, se obțin din condiția de anulare a intensității luminii, astfel încît rezultă că trebuie să avem:

$$\sin 2\zeta = 0, \quad \text{deci } \zeta = \frac{m\pi}{2}, \tag{84}$$

unde m este un număr natural, și

$$\sin \pi \frac{\delta}{\lambda} = 0, \quad \text{deci } \delta = n\lambda, \tag{85}$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots$ reprezintă ordinul franjei figurii de interferenţă obţinută sau, cum se mai numeşte, ordinul izocromatei.

Ţinînd seama de relaţiile (59), (66) şi (85) se obţine

$$C_\sigma(t) = \frac{\lambda}{h\sigma_0} n(t). \tag{86}$$

Aceasta înseamnă că se poate determina funcţia optică de tensiune (de fluaj) pentru o solicitare de întindere după o singură direcţie, dacă se cunoaşte lungimea de undă a sursei de lumină monocromatică folosită λ, grosimea epruvetei h, valoarea tensiunii de solicitare constantă folosită σ_0, precum şi ordinul izocromatei $n(t)$ la orice moment t din intervalul de timp considerat.

În mod analog se poate determina funcţia optică de deformaţie (de relaxare) $C_\varepsilon(t)$, pentru o încercare de întindere după o singură direcţie la o valoare constantă a deformaţiei ε_0.

Cunoscînd din experienţe funcţiile $C_\sigma(t)$ şi $C_\varepsilon(t)$, se pot determina funcţiile $\mathcal{C}_\sigma(t)$ şi $\mathcal{C}_\varepsilon(t)$. De exemplu, pentru determinarea funcţiei $\mathcal{C}_\sigma(t)$ se foloseşte ecuaţia integrală (81), care se rezolvă după formula (35) obţinută prin metoda descrisă amănunţit în [5].

7. UTILIZAREA DATELOR EXPERIMENTALE ÎN VEDEREA DETERMINĂRII COMPONENTELOR TENSORULUI TENSIUNE ÎN STAREA BIDIMENSIONALĂ.

A determina starea de tensiune bidimensională, într-o problemă concretă pusă de practică, înseamnă a determina componentele tensorului tensiune, adică determinarea a trei funcţii $\sigma_{11}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{12}(x_1, x_2, t)$ şi $\sigma_{22}(x_1, x_2, t)$ din planul (x_1, x_2) la momentul de timp t.

S-a văzut că pe cale experimentală se poate obţine, în orice punct al planului (x_1, x_2) şi la orice moment t, ordinul izocromatei $n(t)$ şi parametrul izoclinei $\zeta(t)$.

Ecuaţiile de care dispunem în cazul de faţă, se obţin ţinînd seama de ecuaţiile (71) $\div$ (76), de unde rezultă

$$\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t = \tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \cos 2\zeta(\tau) \, \mathrm{d}\tau, \tag{87}$$

$$\sigma_{12}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_\sigma(t - \tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \sin 2\zeta(\tau)] \, \mathrm{d}\tau, \tag{88}$$

ceea ce înseamnă că se pot determina mărimile $\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)$, şi $\sigma_{12}(t)$ dacă se cunosc funcţiile de sub integrală. Aceste funcţii se determină astfel: $C_\sigma(t)$ se determină din ecuaţia integrală (81) prin procedeul numeric descris anterior (vezi formula (35)), deoarece funcţia $C_\sigma(t)$ se poate determina din relaţia (86); $N(t)$ se determină, ţinînd seama de relaţiile (44) şi (85), din ecuaţia:

$$N(t) = \frac{\lambda}{h} n(t), \tag{89}$$

cunoscînd în orice punct din planul (x_1, x_2) ordinul izocromatei ca funcție de timp $n(t)$; parametrul izoclinei ca o funcție de timp $\zeta(t)$, în același punct și la același timp, se obține de asemenea pe cale experimentală.

Există cazuri cînd parametrul izoclinei nu depinde de timp, sau cînd dependența lui de timp este slabă astfel încît se poate neglija. În acest caz ecuațiile de mai sus capătă o formă simplificată. În cazul unor probleme concrete și alte simplificări sînt posibile, după cum vom vedea într-o lucrare ulterioară, care va avea mai mult un caracter experimental.

Evident că ecuația (87) furnizează numai diferența tensiunilor normale $\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)$. Pentru a obține separat pe $\sigma_{11}(t)$ și $\sigma_{22}(t)$, se procedează analog ca în cazul fotoelasticității plane apelînd, de exemplu, la una din metodele de calcul ale lui Frocht [20]. Adică, considerîndu-se o ecuație de echilibru la un timp t cunoscut,

$$\frac{\partial \sigma_{11}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \tag{90}$$

care integrată de-a lungul axei $x_2 = \text{const} = c$, pe intervalul $[a,b]$ se obține:

$$\sigma_{11}(b, c) = \sigma_{11}(a, c) - \int_a^b \frac{\partial \sigma_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1. \tag{91}$$

Transcriind ecuația (81) în diferențe finite, după ce am luat pe intervalul $[a,b]$ n diviziuni $a = x_1^0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n = b$ și $\Delta x_1 = \Delta x_2$, se obține

$$\sigma_{11}(x_1^n, c) = \sigma_{11}(x_1^0, c) - \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_{12}(x_1^i, x_2)\Big|_{x^i = \frac{x_1^i + x_1^{i-1}}{2}}. \tag{92}$$

În această formulă $\sigma_{11}(x_1^0, c)$ este cunoscut, $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ se determină din relația (88), iar mărimea $\Delta\sigma_{12}$ trebuie înțeleasă ca reprezentînd diferența valorilor lui $\sigma_{12}(x_1^i, x_2)$, luată pe două paralele simetrice față de axa $x_2 = c$, în punctele corespunzătoare diviziunii $x_1^i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ și la timpul t dat din intervalul de timp considerat. Determinînd astfel pe σ_{11} și introducîndu-l în (87) găsim pe σ_{22} și astfel se constată că găsirea celor trei funcții σ_{11},. σ_{22}, σ_{12} este pe deplin posibilă. Pentru găsirea deformațiilor se folosesc relațiile care leagă pe acestea de tensiuni.

Mărimile găsite sînt ale modelului fotovîscoelastic confecționat dintr-un material polimer. Trecerea valorilor obținute pe acest model la prototip — problema similitudinii — este o problemă care necesită a fi tratată separat.

BIBLIOGRAFIE

[1] MINDLIN R.D., A mathematical theory of photoviscoelasticity, J. Appl. Phys., **1949**, vol. 20, No. 2, pp. 206–216.

[2] DILL E.H., On the phenomenological rheo-optic constitutive relations, J. Polymer Science, Part. C, No. 5, 1963, pp. 67–74.

[3] BUGAKOV I.I., Demidova I.I., Issledovanie metoda lineinoi fotopolzucesti, Izv. A. N. SSSR, M.T.T, No. 5, 1970

[4] PREDELEANU M. Stress analysis in bodies with time-dependent properties, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie, Tome 9(57), Nr. 2, 1965, 115–127.

[5] HOPKINS, I.L. and Hamming R.W., On creept and relaxion, J. Appl. Phys, Vol. 28, no. 8, 1957, pp. 906—909.
[6] DILL E.H. and FOWLKES C.W., Photoviscoelastic experiments I, The Trend in Engineering, Vol. 16, No. 3, 1964, pp. 5—9.
[7] THEOCARIS P.S., A reviews of the rheo-optical properties of linear high Polymers, Experimental Mechanics, No. 4, 1965, pp. 1—10.
[8] DURELLI A.J. and RILEY W.F., Introduction to photomechanics, Prentice-Hall Inc./ Englewood Cliffs, N.Y., 1965.
[9] IOSIPESCU N. Introducere în fotoelasticitate, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1958 (și vol. II, 1960).
[10] MÎNDRU I. și HUIDU T., Asupra folosirii rășinilor epoxidice în fotoelasticitate, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Tom. 25, Nr. 3, p.705—713, București, 1967.
[11] FILON L.N.G. and JESSOP H.T., On the Stress-optical effect in transparent solids Strained beyond the elastic limit, Phil. Trans. Roy Soc. London, vol. A 223, 1923, p. 89.
[12] BUGAKOV I.I., Primeneniie polearizaționno-opticeskogo metoda issledovanie napreajenii pri neuprugih deformațiah. V sb. „Polearizaționno-opticeskii metod issledovania napreajenii", L., Izd. vo L.G.U., 1956, pag. 50—68.
[13] NETREBKO V.P., Fotouprugoplasticeskie Svoistva țelluloida. Vestnik M.G.U., Seria matemat. — mehan., No. 6, 1960, p. 60—65.
[14] FROCHT M.M. and Thomson R.A., Studies in photoplasticity, Proc. Third U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., Iune, 1958, pp.533—540.
[15] LANDAU L.D. și LIFȘIȚ E. M., Electrodinamica mediilor continue, Trad. din L. rusă, Ed. Tehnică, București, 1968.
[16] BUGAKOV I.I., Piezoopticeskie svoistva polimernîh materialov, V sb. „Issledovania po uprugosti i plasticinosti" No. 3, Izd. L.G.U., 1964, Str. 172—191.
[17] TOUPIN R.A., A dynamical theory of elastic dielectric, International Journal of Engeneering Science, vol. 1, Nr. 1, 1963, pp. 101—126.
[18] DANIEL, I.M., Experimental Methods for dynamic stress analysis in viscoelastic Materials, Journal of Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 32, Sept. 1965, pp.598—606.
[19] PINDERA, J.T. Remarks on properties of photoviscoelastic model materials, Experimental Mechanics 6, no. 7(1966), 375—380.
[20] FROCHT M.M., Photoelasticity, vol. 1, Chap. 8, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941.

Primită la 11 octombrie 1972

Facultatea de Matematică—Mecanică
București.

ASUPRA PROBLEMEI FOTOVISCOELASTICITĂȚII LINEARE

REZUMAT

Fotovîscoelasticitatea este o metodă optică de analiză a tensiunilor care utilizează materiale vîscoelastice transparente și birefringente.

Posibilitatea extinderii metodei fotoelasticității la materiale vîscoelastice a fost dovedită de alți autori.

Scopul acestei lucrări este de a descrie un model matematico-experimental al fotovîscoelasticității lineare.

Comportarea materialelor vîscoelastice și fotovîscoelastice poate fi exprimată, de obicei, prin legi care conțin operatori liniari diferențiali sau integrali. În această lucrare s-a utilizat o reprezentare integrală.

Lucrarea cuprinde: ecuațiile constitutive ale teoriei liniare ale vîscoelasticității și fotovîscoelasticității, metode de determinare a funcțiilor de fluaj și de relaxare atît mecanice cît și optice și o metodă de separare a tensiunilor principale. Ecuațiile se referă la deplasări mici și încărcări cvasistatice. Materialul este presupus omogen, astfel încît toate funcțiile caracteristice de fluaj și de relaxare sînt independente de coordonatele spațiale.

Acesta este un studiu teoretic, iar un studiu experimental concret va urma în viitor.

ON THE PROBLEM OF THE LINEAR PHOTOVISCOELASTICITY

SUMMARY

Photoviscoelasticity represents a optical method of experimental stress analysis using transparent, birefringent viscoelastic materials.

The possibility to extend the photoelasticity to viscoelastic materials has been shown by other authors.

The aim of this paper is to describe a mathemetical and experimental model of linear photoviscoelasticity.

The behavior of photoviscoelastic materials may usualy be expressed by laws maintaining linear differential or integral operators. In this paper a integral form is used.

The paper includes: the constitutive equations of linear theory of viscoelasticity and photoviscoelasticity, methods for obtaining of creep and relaxation functions both mechanical and optical and a method for separating the principal stress. The equations are limited to small displacements and quasistatic loads. The materials are supposed to be homogenious so that all characteristic functions of creep and relaxation are independent of space coordinates.

This is a theoretical study but an experimenta lone will be undertaken in the future.

ASUPRA EXPRESIEI RESTULUI ÎN FORMULA LUI SIMPSON ŞI CÔTES

VIORICA IACOB

Într-o serie de lucrări consacrate teoriei aproximării integralelor simple, prof. univ. D.V. Ionescu [1] a dezvoltat metode deosebit de eficiente pentru construirea de formule de cuadratură numerică şi de evaluare a restului.

Find dată o formulă de cuadratură cu $n+1$ noduri şi apoi aceeaşi formulă cu $2n+1$ noduri, un procedeu al lui F. Tricomi permite să se deducă o nouă formulă de cuadratură care uneori poate să fie mai avantajoasă decît formulele iniţiale [2].

Această metodă a fost extinsă de noi [3] considerînd o formulă de cuadratură cu $p+1$ noduri şi apoi aceeaşi formulă cu $q+1$ noduri. Ca un caz particular al acestei metode am restabilit formula lui Simpson printr-un nou procedeu dînd şi o expresie remarcabilă a restului.

În prezenta lucrare această problemă va fi reluată pe o altă cale şi se va da o limitare a restului şi mai satisfăcătoare ca cea anterioară.

1. Să considerăm intervalul $[a, b]$ de pe axa reală şi fie $f: [a, b] \to R$ o funcţie de clasa $C_2[a, b]$, adică continuă împreună cu derivatele ei de primele două ordine pe $[a, b]$.

Formula de cuadratură a trapezelor [1], p. 12, ne dă

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R_1, \tag{1}$$

unde restul R_1 admite expresia

$$R_1 = -\int_a^b f''(x)\,(x-a)\,(b-x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Să considerăm aceeaşi formulă însă relativă la intervalul $[a,b]$ împărţit în două părţi egale, cu ajutorul nodurilor a,c,b, unde

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

În acest caz avem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{4}[f(a)+2f(c)+f(b)] + R_2, \tag{3}$$

iar restul R_2 admite expresia

$$(4) \qquad R_2 = -\frac{1}{2}\left\{\int_a^c f''(x)\,(x-a)\,(c-x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f''(x)\,(x-c)\,(b-x)\,\mathrm{d}x.\right.$$

Să înmulțim ambii membri ai egalității (1) prin λ iar aceia ai egalității (3) prin μ, unde λ și μ sînt numere reale ce urmează a fi determinate ulterior. Presupunem $\lambda + \mu \neq 0$ și notăm pentru simplificare

$$(5) \qquad \xi = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda + \mu}, \quad \eta = \frac{\lambda b + \mu c}{\lambda + \mu}.$$

Adunînd membru cu membru relațiile obținute, se găsește după împărțire cu $\lambda + \mu$,

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{4}\left[\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu} f(a) + \frac{2\mu}{\lambda+\mu} f(c) + \frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu} f(b)\right] + R,$$

unde

$$R = -\int_a^c f''(x)\,(x-a)\,(\eta - x)\,\mathrm{d}x$$

$$(7) \qquad -\frac{1}{2}\int_c^b f''(x)\,(b-x)\,(x-\xi)\,\mathrm{d}x.$$

Se obține astfel o nouă formulă de cuadratură. Se știe însă că formulele de cuadratură (1) și (3) sînt „exacte" în sensul că restul corespunzător este nul dacă $f(x)$ este un polinom de gradul întîi.

Pentru a ameliora formula găsită să impunem constantelor λ și μ condiția ca formula (6) să fie exactă și pentru un polinom de gradul doi sau trei. Este evident suficient să scriem condițiile că $R = 0$ pentru $f(x) = x^2$ sau $f(x) = x^3$.

Se obțin astfel condițiile

$$(8) \qquad \begin{aligned} \xi - \eta &= \frac{b-a}{3}, \\ d_2\xi - d_1\eta &= \frac{1}{3}(b^2 - a^2), \end{aligned}$$

unde s-a notat

$$(9) \qquad d_1 = \frac{2a+b}{3}, \quad d_2 = \frac{a+2b}{3}$$

Avem $a < d_1 < c < d_2 < b$, punctele d_1 și d_2 obținîndu-se ca puncte de subdiviziune atunci cînd împărțim intervalul a,b în trei părți egale.

Din sistemul (8) se obține imediat

$$(10) \qquad \xi = d_2, \quad \eta = d_1,$$

iar din (5) rezultă că trebuie să avem unica relație

$$(11) \qquad 4\lambda + \mu = 0,$$

ceea ce determină raportul μ/λ.

În virtutea lui (10) şi (11), formula de cuadratură devine, cu această alegere a raportului μ/λ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)] + R, \tag{12}$$

unde

$$R = \int_a^c f''(x)\,(x-a)\,(x-d_1)\,dx - \frac{1}{2}\int_c^b f''(x)\,(b-x)\,(x-d_2)\,dx. \tag{13}$$

Se regăseşte astfel formula lui Cotes, însă cu o nouă expresie a restului, care este remarcabilă deoarece nu face să intervină decît derivata a doua a lui $f(x)$, în timp ce în expresia clasică [1] se presupune existenţa şi continuitatea derivatei de ordinul patru a lui $f(x)$.

Rezultă din cele de mai sus că ecuaţia funcţională

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

admite ca soluţii polinoamele de gradul trei.

Reciproc, soluţiile continue cele mai generale ale ecuaţiei funcţionale precedente sînt polinoamele de gradul trei, după cum a demonstrat J. Herbrand [4]. Această ecuaţie constitue un caz particular al unor ecuaţii funcţionale considerate de N. Ciorănescu [5].

2. Expresia restului poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{2}\Big\{&\int_{d_1}^c f''(x)\,(x-a)\,(x-d_1)\,dx + \int_c^{d_2} f''(x)\,(b-x)\,(d_2-x)\,dx \\ &-\int_a^{d_2} f''(x)\,(x-a)\,(d_1-x)\,dx - \int_{d_2}^b f''(x)\,(b-x)\,(x-d_2)\,dx\Big\} \end{aligned} \tag{13'}$$

astfel ca în fiecare integrală factorii care înmulţesc pe $f''(x)$ să fie pozitivi în intervalele deschise respective.

Aplicînd teorema mediei se deduce deci că

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{2}\Big\{&f''(\xi_1)\int_{d_1}^c (x-a)\,(x-d_1)\,dx + f''(\xi_2)\int_c^{d_2} (b-x)\,(d_2-x)\,dx \\ &-f''(\xi_3)\int_a^{d_1} (x-a)\,(d_1-x)\,dx - f''(\xi_4)\int_{d_2}^b (b-x)\,(x-d_2)\,dx\Big\} \end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$\xi_1 \in [d_1, c], \quad \xi_2 \in [c, d], \quad \xi_3 \in [a, d_1], \quad \xi_4 \in [d_2, b].$$

Dar

$$\int_{d_1}^c (x-a)\,(x-d_1)\,dx = \int_c^{d_2} (b-x)\,(d_2-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{2\cdot 3^4},$$

$$\int_a^{d_1} (x-a)\,(d_1-x)\,dx = \int_{d_2}^b (b-x)\,(x-d_2)\,dx = \frac{(b-a)^3}{2\cdot 3^4}$$

Rezultă astfel expresia restului sub forma

$$R = \frac{(b-a)^3}{324}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) - f''(\xi_3) - f''(\xi_4)] \tag{15}$$

Fie M_j şi m_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ respectiv maximele şi minimele lui $f''(x)$ în intervalele $[d_1, c]$, $[c, d_2]$, $[a, d_1]$, $[d_2, b]$ luate în ordinea indicată. Din (15) rezultă limitările restului sub forma

$$\frac{(b-a)^3}{324}(m_1 + m_2 - M_3 - M_4) \leqslant R \leqslant \frac{(b-a)^3}{324}(M_1 + M_2 - m_3 - m_4) \tag{16}$$

care ne permit uneori să apreciem dacă rezultatul obţinut prin formula de cuadratură (12) este prin exces sau prin lipsă.

Dacă Ω este oscilaţia lui $f''(x)$ în $[a,b]$ rezultă de asemenea limitarea modulului restului dată de

$$|R| < \frac{(b-a)^3}{324}\Omega \tag{17}$$

care este mai bună decît aceea pe care am semnalat-o anterior [3].

3. Să împărţim acum intervalul $[a, b]$ în $2n$ părţi egale prin punctele de subdiviziune

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2 \dots x_{2n-1},\ x_{2n} = b.$$

Vom aplica formula (12) fiecăruia dintre intervalele $\omega_j = [x_{2j-2}, x_{2j}]$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, avînd respectiv mijlocul în punctele x_{2j-1}. Să notăm prin $d_1^{(j)}$ şi $d_2^{(j)}$ abscisele punctelor de subdiviziune ale intervalului ω_j în trei părţi egale; fie $M_k^{(j)}$ şi $m_k^{(j)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ maximele şi minimele lui $f''(x)$ în intervalele

$$\omega_1^{(j)} = [d_1^{(j)}, x_{2j-1}],\ \omega_2^{(j)} = [x_{2j-1}, d_2^{(j)}],\ \omega_3^{(j)} = [x_{2j-2}, d_1^{(j)}],\ \omega_4^{(i)} = [d_2^{(j)}, x_{2j}]$$

cărora le corespund valorile 1, 2, 3, 4 ale indicelui k.

Se obţine astfel formula lui Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6n}\left[f(a) + \sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(b)\right] + R, \tag{18}$$

unde R are expresia

$$R = \frac{(b-a)^3}{324n^3}\sum_{j=1}^{n}[f''(\xi_1^{(j)}) + f''(\xi_2^{(j)}) - f''(\xi_3^{(j)}) - f''(\xi_4^{(j)})] \tag{19}$$

cu $\xi_k^{(j)} \in \omega_k^{(j)}$, $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Din (19) rezultă limitările

$$\frac{(b-a)^3}{324n^3}\sum_{j=1}^{n}[m_1^{(j)} + m_2^{(j)} - M_3^{(j)} - M_4^{(j)}] \leqslant R \leqslant \tag{20}$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^3}{324n^3}\sum_{j=1}^{n}[M_1^{(j)} + M_2^{(j)} - m_3^{(j)} - m_4^{(j)}]$$

Prin urmare, dacă Ω_j reprezintă oscilaţia lui $f''(x)$ în intervalul ω_j, avem majorarea modulului restului sub forma

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{162n^3} \sum_{j=1}^{n} \Omega_j \leqslant \frac{(b-a)^3}{162n^2} \Omega \tag{21}$$

deoarece este evident că $\Omega_j \leqslant \Omega$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

4. Cu titlu de aplicaţie să reluăm integrala

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539816397 \ldots$$

În cazul actual

$$f(x) = (1+x^2)^{-1}, f''(x) = (6x^2-2)(1+x^2)^{-3},$$

$\Omega = \max\limits_{[0,1]} |f''(x_1) - f''(x_2)| = \frac{5}{2}$. Aplicînd formula (12) se găseşte

$$I = 0{,}78333 \ldots + R.$$

Avem

$$m_1 = f''\left(\frac{1}{3}\right), m_2 = f''\left(\frac{1}{2}\right), \quad m_3 = f''(0), \; m_4 = f''\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$M_1 = f''\left(\frac{1}{2}\right), \; M_2 = f''\left(\frac{2}{3}\right), \; M_3 = f''\left(\frac{1}{3}\right), \; M_4 = f''(1).$$

Din (16) se obţin, limitările

$$-0{,}00233 \ldots < R < 0{,}0054, \tag{22}$$

în timp ce (17) conduce la

$$|R| < 0{,}015$$

Din (22) rezultă astfel că valoarea obţinută pentru $\pi/4$ are două zecimale exacte.

Primită la 1 iunie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. **D.V. Ionescu,** *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
2. **F. Tricomi,** *Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metodo di „estrapolazione"*, Bolletino dell'Unione Matematica Italiana (3), *14*, 102–104, (1959).
3. **Viorica Iacob,** *Generalizarea unei formule de cuadratură a lui F. Tricomi*, Studii şi Cercetări matematice, 17, nr. 8, 1965, 1121–1230.

4. **J. Herbrand**, *Recherche des solutions bornées de certaines équations fonctionnelles*, Comptes rendus, Acad. des Sciences, Paris, 189, 1929, 669–271.

5. **N. Cioránescu**, *Sur la définition fonctionnelle des polynomes et quelques formules à deux et trois niveaux*. Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, 33—34, 1932, 39–47.

SUR L'EXPRESSION DU RESTE DANS LES FORMULES DE SIMPSON ET CÔTES

RÉSUMÉ

L'auteur a déja donné [3] une expression du reste de la formule de Côtes (12), ne faisant intervenir que la dérivée seconde de la fonction $f(x)$. Actuellement, on déduit la formule en question directement de la formule des trapèzes, ce qui conduit aux expressions (13), (14) et (15) du reste, ainsi qu'aux limitations (16) et (17) qui sont meilleures que celles données dans [3]. Des extensions sont données pour ce qui concerne la formule de Simpson (18) dont le reste, donné par (19), admet les majorations (20) et (21).

UN STUDIU PROBABILISTIC AL REACȚIILOR ÎN LANȚ CU RAMIFICAȚIE

A. MUJA, A. ARSIN, P. ILIE

Se consideră o reacție în lanț cu ramificație directă căreia i se asociază un lanț Markov omogen de tip Galton-Watson.

Introducîndu-se funcțiile generatoare ale procesului se studiază comportarea asimptotică a procesului. Se fac unele considerații asupra momentului de întrerupere a reacției și apoi se scot în evidență avantajele metodei stochastice utilizate, în raport cu cea deterministă.

În cele ce urmează propunem un studiu al reacțiilor în lanț cu ramificație directă cu ajutorul lanțurilor Galton-Watson. Pentru aceasta vom lua în considerare un singur centru activ X al reacției în lanț (ceea ce nu restrînge generalitatea problemei) și vom presupune că acesta dă naștere unui număr aleator α_1 de noi centri activi. Fiecare din cei α_1 centri activi — în mod independent unul de altul — acționează apoi în același mod cu centrul activ inițial X. Acest proces se continuă, din punct de vedere teoretic, indefinit.

Dacă notăm prin ξ_n, $n \in N^*$, $N^* = \{0,1 \dots\}$ numărul centrilor activi din a $n-a$ ramificație, atunci $\xi_0 = 1$, iar pentru $n \in N$, $\{N = 1, 2, \dots\}$, $i, j \in N$, $i \neq 0$ avem

$$P(i,j) = P\{\xi_{n+s} = j \mid \xi_n = i\} = P\{\alpha_1 + \dots \alpha_i = j\} = \tag{1}$$

$$= \sum_{P(0,0)=1,\quad \alpha \geqslant 0,\ \alpha_1 + \dots \alpha_i = j} (p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_i})$$

unde p_α ($\alpha \in N^*$) este probabilitatea de realizare a evenimentelor α. Relația (1) pune în evidență faptul că lanțul Markov omogen $\{\xi_n\}_{n \in N}$ este un lanț Galton — Watson.

Fie

$$G_1(z) = G(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_\alpha z^\alpha, \ |z| \leqslant 1 \tag{2}$$

funcția generatoare a repartiției variabilei aleatoare α_1.

Observăm că

$$G_0(z) = z, \quad G_{n+1}(z) = G[G_n(z)] \tag{3}$$

De aici rezultă

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(i, j)\, z^j = [G(z)]^i$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} P_n(i, j)\, z^j = [G_n(z)]^i, \quad n \in N^*, \ |z| \leqslant 1 \tag{4}$$

Să presupunem că $p_1 \neq 1$, adică $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(i, j) < \infty$ pentru $i \in N^*$, $j \in N$ și că $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha p_\alpha = m = 1$, $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha(\alpha - 1)\, p_\alpha = \sigma^2 < \infty$

În acest caz din (2) rezultă

$$\left.\frac{dG}{dz}\right|_{z=1} = 1, \quad \left.\frac{d^2G}{dz^2}\right|_{z=1} = \sigma^2 < \infty$$

Considerînd acum dezvoltarea în serie Taylor a funcției $G(z)$ în jurul punctului $z = 1$ obținem

$$G(z) = z + \frac{\sigma^2}{2}(1 - z)^2 - \theta(z)\,(1-z)^2, \quad 0 \leqslant z < 1 \tag{5}$$

unde

$$\theta(z) = \sum_{\alpha=3}^{\infty} p_\alpha \sum_{j=2}^{\alpha-1} \sum_{h=1}^{j-1} [1 - z^h], \quad 0 \leqslant z < 1 \tag{6}$$

Din (5) și (6) deducem că, pentru $0 \leqslant z < 1$,

$$\theta(z) \leqslant \frac{\sigma^2}{2}, \quad \frac{G(z) - Z}{1 - Z} = (1 - z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right] < 1 \tag{7}$$

și pentru $z \nearrow 1$, $o \leqslant \theta(z) \searrow 0$

Aceasta ne permite să stabilim o relație între G_n și dispersia finită σ^2 a variabilei aleatoare α.

Să notăm

$$f(z) = \frac{1}{G(z) - 1} + \frac{1}{1 - z} + \frac{\sigma^2}{2} \tag{8}$$

Înlocuind aici $G(z)$ prin expresia sa dată de (5) găsim că

$$f(z) = \frac{\theta(z) - \frac{\sigma^2}{2}(l - z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right]}{1 - (1 - z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right]}, \quad 0 \leqslant z < 1 \tag{9}$$

Pe de altă parte, din (7) şi (9) rezultă inegalităţile

$$(z-1)\frac{\sigma^4}{4} \leqslant \theta(z) - \frac{\sigma^2}{2}(1-z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right] \leqslant$$

$$\leqslant f(z) \leqslant \frac{\theta(z) - (1-z)\,\theta(z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right]}{1-(1-z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right]}$$

adică

$$-(1-z)\frac{\sigma^4}{4} \leqslant \theta(z) - \frac{\sigma^2}{2}(1-z)\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta(z)\right] \leqslant$$

$$\leqslant f(z) \leqslant \theta(z),\ 0 \leqslant z < 1 \tag{10}$$

Luînd acum în (8) şi (10) $z = G_\alpha(u)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, ţinînd seama că $G_0(u) = u$ şi sumînd după α obţinem

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} f[G_\alpha(u)] = \frac{1}{G_n(u)-1} + \frac{1}{1-u} + n\,\frac{\sigma^2}{2},\quad n \in N,\quad 0 \leqslant u < 1 \tag{11}$$

şi

$$[G_\alpha(0) - 1]\,\frac{\sigma^4}{4} \leqslant [G_\alpha(u) - 1]\,\frac{\sigma^4}{4} \leqslant f[G_\alpha(u)] \leqslant \theta[G_\alpha(u)] \leqslant \theta[G_\alpha(0)].$$

Aici am avut în vedere că pentru $z \nearrow 1$, avem $0 \leqslant \theta(z) \searrow 0$. Deoarece avem şi $G_\alpha(0) \nearrow 1$, prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$, în relaţia (11), avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(1-G_n(u))^{-1} - (1-u)^{-1}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\quad 0 \leqslant u < 1 \tag{12}$$

care constituie relaţia căutată între G_n şi $\sigma^2 < \infty$.

Dacă în (12) luăm $u = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - G_n(0)] = \lim_{n\to\infty} nP\{\xi_n > 0 \mid \xi_0 = 1\} = \frac{2}{\sigma^2} \tag{13}$$

Apoi, dacă în (5) luăm $z = G_n(u)$ şi avem în vedere că pentru $z \nearrow 1$, $0 \leqslant \theta$, $(z) \searrow 0$ din (12) rezultă deasemenea

$$\lim_{n\to\infty} n^2[G_{n+1}(u) - G_n(u)] = \frac{2}{\sigma^2},\quad 0 \leqslant u < 1 \tag{14}$$

Pe baza celor de mai sus se poate studia acum comportarea asimptotică a probabilităţilor de trecere după n paşi $P_n(i, j)$. Pentru aceasta să calculăm diferenţa

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} f[G_\alpha(0)] - \sum_{\alpha=0}^{n-1} f[G_\alpha(u)]$$

Folosind (11) obținem

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \{f[G_\alpha(0)] - f[G_\alpha(u)]\} = \frac{1}{1-G_n(u)} - \frac{1}{1-G_n(0)} - \frac{u}{1-u}$$

Pe de altă parte, dacă în membrul stîng al acestei egalități substituim pe f prin expresia sa dată de (9), avem

$$\frac{1}{1-G_n(u)} - \frac{1}{1-G_n(0)} - \frac{u}{1-u} = \tag{15}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{\theta[G_\alpha(0)] - \theta[G_\alpha(u)] + [G_\alpha(0) - G_\alpha(u)] \left\{\frac{\sigma^2}{2} - \theta[G_\alpha(0)]\right\} \left\{\frac{\sigma^2}{2} - \theta[G_\alpha(u)]\right\}}{\left\{[1 - [1 - G_\alpha(u)] \left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta[G_\alpha(u)]\right]\right\} \left[1 - (1 - G_\alpha(0)) \left(\frac{\sigma^2}{2} - \theta(G_\alpha(0))\right)\right]}$$

Deoarece $G_\alpha(0) \leqslant G_\alpha(u) \leqslant 1$ și $\lim\limits_{\alpha\to\infty} G_\alpha(0) = 1$ avem, pentru o anumită valoare $u \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant \lim_{\alpha\to\infty} \left\{\left[\frac{\sigma^2}{2} - \theta[G_\alpha(u)]\right] [1 - G_\alpha(u)] - 1\right\} = 1$$

și deci din (15) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-G_n(u)} - \frac{1}{1-G_n(0)} - \frac{u}{1-u}\right] = g(u)$$

există pentru $0 \leqslant u < 1$, dacă seriile

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \{\theta G_\alpha(0)] - \theta[G_\alpha(u)]\}$$

și

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} [G_\alpha(0) - G(u)]$$

sînt absolut convergente, condiție care este îndeplinită dacă alegem k astfel încît $G_k(0) \geqslant u$. Procedînd astfel avem, într-adevăr,

$$0 \leqslant \theta[G_\alpha(0)] - \theta[G_\alpha(u)] \leqslant \theta[G_\alpha(0)] - \theta[G_{\alpha+k}(0)]$$

și

$$0 \leqslant G_\alpha(u) - G_\alpha(0) \leqslant G_{\alpha+k}(0) - G_\alpha(0)$$

ceea ce arată că seriile de mai sus sînt absolut convergente pentru $0 \leqslant u < 1$ și deci $g(u)$ există.

La acest rezultat ajungem și dacă pornim de la egalitatea

$$n^2[G_n(u) - G_n(0)] = n[1 - G_n(u)]\, n[1 - G_n(0)] \left[\frac{1}{1-G_n(u)} - \frac{1}{1-G_n(0)}\right]$$

Într-adevăr, dacă

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - G_n(u)] = \frac{2}{\sigma^2},$$

în conformitate cu 13, urmează că există limita finită

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{2} n^2[G_n(u) - G_n 0)], \quad 0 \leqslant u < 1$$

Fie această limită $\Gamma(u)$. Întrucît

$$n^2[G_n(u) - G_n(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(1, j)\, u^j, \quad 0 \leqslant u < 1$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sigma^2}{2} P_n(1, j) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(i, j) \quad (i \neq j)$$

și deci funcția limită $\Gamma(u)$ esteo serie de puteri cu coeficienți $m(j) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(i, j)$.

Mai mult, pentru $z \in (0, 1)$ și $j \in N$

$$n^2 P_n(1, j) \leqslant \frac{n^2}{z^j} \sum_{k=1}^{\infty} P_n(1, k)\, z^k = \frac{n^2}{z^j} [G_n(z) - G_n(0)]$$

ceea ce ne conduce la conluzia că avem deasemenea

$$\Gamma(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{2} n^2 \sum P_n(1, j)\, u^j,$$

Deci limita $\Gamma(u)$ este o funcție analitică în $|u| < 1$. Coeficienții ei sînt limite ale unor subșiruri alese astfel încît $\frac{\sigma^2}{2} n^2 P_n(1, j)$ să aibă o limită. Dar aceasta ne conduce la concluzia că $n^2 P_n(1, j)$ are o limită pentru fiecare $j \in N$, cînd $n \to \infty$. Se arată într-adevăr că

$$\lim_{n\to\infty} n^2 P_n(i, j) = \frac{2i}{\sigma^2} m(j) \geqslant 0 \tag{16}$$

Pentru $i = 1$, (16) este adevărată, așa cum s-a arătat mai sus.
În cazul $i > 1$, observăm că evenimentul $\xi_n = j$ are loc fie în cazul cînd toți centrii activi din ramificația a N-a sînt proveniți din i centrii activi X inițiali, fie în cazul cînd pornind de la un singur centru activ X, se produc cu o probabilitate mică, la fiecare ramificație

$j_1, j_2, \ldots, j_N$ $(j_1 + j_2 + \ldots + j_N = j)$ noi centri activi.

Avem deci

$$0 \leqslant P_n(i, j) - iP_n(1, j)\,[P_n(1, 0)]^{i-1} =$$

$$\sum_{N=2}^{\min(i,j)} C_N^i [P_n(1, 0)]^{i-N} \sum_{\substack{j_\alpha > 0, \\ j_1+j_2+\dots+j_N=j}} P_n(1, j_1)\, P_n(1, j_2) \dots P_n(1, j_N)$$

Deoarece fiecare termen din membrul drept al acestei egalităţi este de ordinul n^{-2N}, $N \geqslant 2$, rezultă că $P_n(i, j) \sim iP_n(i, j)$ ceea ce demonstrează complet relaţia (16).

Probabilitatea ca lanţul ramificat să se întrerupă este

$$p^* = P\{\xi_n = 0\} = P\{\bigcup_{n \in N} (\xi_n = 0)\}$$

adică

$$p^* = \lim_{n \to \infty} P\{(\xi_1 = 0) \cup \dots \cup (\xi_n = 0)\} = \lim_{n \to \infty} G_n(0)$$

În cazul exceptat de noi $p_1 = 1$, avem $G(z) = z$ şi $p^* = 0$. Dacă $p_1 \neq 0$ observăm că şirul $\{G_n(0)\}_{n \in N^*}$ este nedescrescător. Din cele de mai sus ştim că $0 \leqslant G_1(0) \leqslant G_2(0) \leqslant \dots \leqslant 1$ şi deci $0 \leqslant p^* \leqslant 1$ $(G_{n+2}(0) = G(G_n(0))$ şi $p^* = G(p^*))$. Mai mult, $G(1) = 1$. Rezultă $G(u) > u$, $u \in [0, 1]$, ceea ce arată că nu este posibilă decît valoarea $p^* = 1$.

Se arată cu uşurinţă că reacţia în lanţ remificat poate continua un timp oricît de îndelungat. Într-adevăr, în ipotezele noastre valoarea medie a momentului întreruperii este infinit, deşi probabilitatea ca momentul întreruperii să fie finit este 1.

Observaţie

În cazul tratării deterministe a reacţiilor în lanţ cu ramificaţie directă se ştie că pentru un centru activ X există trei posibilităţi

$$\begin{tikzcd} & & \text{întrerupere} \\ X \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & X & \text{propagare} \\ & & \mu X \text{ ramificare } (\mu \in N) \end{tikzcd}$$

Fiecare dintre aceste procese se produc cu probabilităţile β, α, δ cu $\alpha + \beta + \delta = 1$. Evident, probabilitatea ca lanţul să nu se întrerupă este $1 - \beta$. Dacă δ^* este probabilitatea de ramificare cu condiţia ca probabilitatea de întrerupere să fie zero, atunci probabilitatea de ramificare δ are expresia

$$\delta = (1 - \beta)\, \delta^*.$$

Schematic, reacţia în lanţ cu ramificaţie directă se reprezintă prin:

$$\to X \to X \to X \to \dots X \qquad \text{întrerupere}$$

iniţiere

unde observăm că:

1) Între reacţia de iniţiere şi cea de întrerupere pot avea loc unul din următoarele două evenimente:
$X \to X$ sau $X \to \mu X$ cu probabilitatea $1 - \beta$.
Deci, notînd prin ν lungimea lanţului primar avem $\nu = \frac{1-\beta}{\beta}$.

2) Pentru fiecare centru activ X, cu excepţia celui care se rupe, se pot dezvolta $\mu - 1$ lanţuri secundare cu probabilitatea δ^*. Deoarece avem ν centri activi de acest tip atunci se pot forma $(\mu - 1)\,\delta^*\,\nu$ lanţuri secundare.

3) Fiecare lanţ secundar care are o lungime ν antrenează la rîndul său formarea a $(\mu - 1)\,\delta^*\,\nu$ lanţuri de lungimea ν.

4) Procesul se repetă indefinit.

Lungimea medie a lanţului este deci,

$$\nu' = \nu + [(\mu - 1)\,\nu\,\delta^*]\,\nu + [(\mu - 1)\nu\,\delta^*]^2\nu + \ldots + [(\mu - 1)\,\nu\,\delta^*]^n\,\nu + \ldots$$

Deci

$$\nu' = \frac{\nu}{1-(\mu-1)\,\nu\delta^*} \quad \text{cu} \quad (\mu - 1)\,\nu\,\delta^* < 1$$

adică $(\mu - 1)\,\delta < \beta$. Cînd $(\mu - 1)\,\delta \to \beta$ lungimea medie a lanţului tinde spre infinit.

Cele de mai sus dovedesc acordul existent între cele două metode de tratare a reacţiilor considerate.

Primită la 5 mai 1972

Facultatea de Chimie
Universitatea Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. BARTHOLOMAY A.F.: *Stochastic Models for Chemical Reactions* Bull. Math. Biophys, vol 20, 1958.
2. BARTOSZYNSKI R: *Branching processes and the theory of epidemics, Proc.* Berkeley Symp. Math. Statist. Prob, IV Univ. California Press, Berkeley.
3. BHARUCHA–REID A.T: *Elements of the theory of Markov processes and their applications,* Mc. Graw-Hill, New York.
4. FROST A.A şi PEARSON R.G: *Kinetics and Mechanism.* Wiley, 1956.
5. HARRIS T.E: *The Theory of Branching Processes,* Springer, Berlin.
6. IOSIFESCU M, TĂUTU P: *Procese stochastice şi aplicaţii în Biologie şi Medicină,* Ed. Academiei R.S.R, Buc. 1968.
7. MIHOC GH, FIRESCU D.: *Stastistică Matematică,* Ed. didactică, Bucureşti 1966.
8. ONICESCU O, *Calculul probabilităţilor* Ed. Tehnică, Bucureşti 1956.
9. SOCHET L.R. *La cinetique des reactions en chaines.* Dunod, Paris 1971.

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ ЦЕПНЫХ РЕАКЦИЙ С РАЗВЕТВЛЕНИЯМИ

–КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ–

Пусуь имеется цепная реакция т разветвлениями которой сопостовляется марковский процесс типа Галтона — Ватсона. Введя происзводщие функции процесса определяются их расщирения форма и изучается асимптотическое поведение процдсса.

Приводятся некоторые соображения относительно моментов прерывания реакйии и подчеркивается преимущества стохастичеткий метод перед определением.

PRÜFUNC EINER WARSCHEINLICHEN WIRKUNG IN DER REIHE DER VERZWEIGUNG.

UEBERSICHT

Es wird als eine Wirkungs-Kette mit direkter Verzweigung betrachtet, vereinigt mit einer gleichartigen Markov-Kette des Types Galton-Watson.
Die Tätigkeit des Generatorsverfahren wird eingesetzt durch welches die auflarende Form erhalten wird und das Verhalten des asymtotische Verfahren geprüft.
Es werden einige Bemerkungen gemacht im Augenblick der Wirkungsunterbrechung, es folgt die Schulssziehung mit der Vorteilen der zufällingen Methode im Vergleich mit der erziehlten.

SOME REMARKS ON THE THEORY OF NORMAL ALGORITHMS

RADU NICOLESCU

In this paper one proposes a slightly modified definition of the functions generated by normal algorithms. Using this definition and some general propositions concerning partial functions, one gives a fast way of proving conditional equalities.

The usual way of proving a conditional equality of expressions containing partial functions generated by normal algorithms is the following:

a) One shows that if the left expression has a meaning, then the right one has also a meaning and they are equal to each other.

b) One shows that if the right expression has a meaning then the left one has also a meaning (and it is no more necessary to prove again their equality (or conversely). This is the procedure used in Markov (1) Using Proposition 6.1., or its Corollary 6.1., we may even renounce to prove b), because b) will be an immediate consequence of the propositions used in order to prove a).

The results are susceptible also to be applied for proving conditional equalities of other mathematical substitutes of the intuitive concept of algorithm.

1. Let M be a set and f be a partial fonction from M to M. Let us design by Dom (f) the domain of f. It is useful to keep always in mind that a partial function is a binary relation that satisfies some properties. So, $f(x) = y$ means that $(x, y) \in f$, consequently it implies that $x \in$ Dom (f) or, in other words, that $f(x)$ *has a meaning*.

It is obvious that $\mathrm{Dom}(f) \subset M$, so it is possible to raise the question of iterating the partial function f(i. e. of appling consecutively f a finite numbr of times). Let us denote $f^0 = i_M$ (the identity of M), ... $f^{n+1} = (f^0 f^n)$, ...,

Let us remark that $f^0, \ldots, f^{n+1}, \ldots$ are also partial functions.

For every $n \in N$ let us denote by $\mathrm{Dom}^{(n)}$ (f) the set of elements of M for which f can be applied al least n times consecutively.

Let us denote by $\mathrm{Dom}^{(\infty)}$ (f) the set of elements of M for which f can be applied any number of times consecutively.

It is quite obvious that the following propositions hold on:

Proposition 1. 1

(a) $\mathrm{Dom}^{(n)}(f) = \mathrm{Dom}(f^n)$ for $n \in N$

(b) $M = \mathrm{Dom}^{(0)}(f) = \mathrm{Dom}^{(1)}(f) \supset \ldots\ldots \supset \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)$

(c) $\mathrm{Dom}^{(\infty)}(f) = \bigcap_{n \in N} \mathrm{Dom}^{(n)}(f)$

2. Let M, N be two sets and f, g, ψ be partial functions:

$$f\colon M \to M,\ g\colon N \to N, \quad \psi : M \to N$$

Then the following proposition is valid:

Proposition 2.1 If, for $x, y \in M$, $f(x) = y$ implies that $g^n(\psi(x)) = \psi(y)$ for some $n \in N$, $n \geqslant 1$, then $\psi(\mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)) \subset \mathrm{Dom}^{(\infty)}(g)$

Proof We prove that, for each $W \in \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)$, $\psi(W)$ is in $\mathrm{Dom}^{(\infty)}(g)$, i.e. for every $p \in N$, $\psi(W) \in \mathrm{Dom}^{(p)}(f)$

From $W \in \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f) \subset \mathrm{Dom}^{(p)}(f) = \mathrm{Dom}(f^p)$ if follows at once that there exists a finite sequence $x_0 = W$,

$$x_1, \ldots, x_p \in M \text{ such that } f(x_i) = x_{i+1} (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

From the hypothesis follows that, for each $0 \leqslant i \leqslant p-1$ there exists a $n_i \in N$, $n_i \geqslant 1$ such that $g^{n_i}(\psi(x_i)) = \psi(x_{i+1})$

Obvoiusly,

$$\psi(x_p) = g^{n_{p-1}}(\psi(x_{p-1})) = g^{n_{p-1}}(g^{n_{p-2}}(\psi(x_{p-2}))) = \ldots =$$

$$= g^{n_{p-1}}(\ldots(g^{n_0}(\psi(x_0)))\ldots) = g^{n_{p-1}+\cdots+n_0}(\psi(x_0)).$$

Hence, $\psi(W) \in \mathrm{Dom}^{n_{p-1}+\cdots+n_0}(f) \subset \mathrm{Dom}^{\overbrace{1+\ldots+1}^{p \text{ times}}}(f) = \mathrm{Dom}^{(p)}(f)$, because each $n_i \geqslant 1$.

3. Let M be a set, f, g two partial functions from M to M, such that $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \emptyset$. In this case we can define a partial function $H : M \to M$ in the following manner:

Let $x \in M$

1. If $x \in \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)$, then we leave $H(x)$ undefined.

2. If $x \in \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)$, then there is a $n \in N$ such that $x \notin \mathrm{Dom}^{(n)}(f)$ Let n_0 be the smallest integer n having this property. We remark easily, because $M = \mathrm{Dom}^{(0)}(f)$, that n_0 is greater or equal to 1.

2 a) If $f^{n_0-1}(x) \in \mathrm{Dom}(g)$, then we set

$$H(x) = g(f^{n_0-1})(x))$$

2 b) Otherwise we set $H(x) = f^{n_0-1}(x)$

Definition 3.1 The partial function H defined as above is named the (partial) function generated by the pair (f, g).

4. Let M, N be two sets and f_1, f_2, g_1, g_2, ψ be partial functions defined as follows:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f_1, f_2"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[d, "\psi"] \\ N \arrow[r, shift left, "g_1, g_2"] \arrow[r, shift right] & N \end{tikzcd}$$

Let us suppose that $\mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2) = \emptyset = \mathrm{Dom}(g_1) \cap \mathrm{Dom}(g_2)$ In this case we can define the partial functions F and G, generated by the pairs (f_1, f_2) and (g_7, g_2) respectively.

Proposition 3.1 If, for $x, y \in M$, $f_1(x) = y$ implies that $g_1^n(\psi(x)) = \psi(y)$ for some $n \geqslant 1$[1] then, for $x \in M$ if $F(x)$ is not defined then also $G(\psi(x))$ is not defined.

Proof. The result follows easily from Proposition 2.1, remarking that ($F(x)$ is not defined) has the some logical value as ($x \in \mathrm{Dom}^{(\infty)}(f)$).

5. Henceforth we assume that the reader is familiarized with Markov (1).

Let A be an alphabet (i, e: a finite set), A^* the monoid generated by A, $\mathcal{A}$ a normal algorithm in A. $\mathcal{A}$ defines two partial functions: $|\!\!-_{\mathcal{A}}, |\!\!-_{\mathcal{A}}\cdot : A^* \to \to A^*$ [2]

Obviously $\mathrm{Dom}\,(|\!\!-_{\mathcal{A}}) \cap \mathrm{Dom}\,(|\!\!-_{\mathcal{A}}\cdot) = \emptyset$

Let us remark that by $P \,\overline{}|_{\mathcal{A}}$ [3] where $P \in A^*$, we mean that $P \notin \mathrm{Dom}\,(|\!\!-_{\mathcal{A}}) \cup \mathrm{Dom}\,(|\!\!-_{\mathcal{A}}\cdot)$

Now it is quite clear that the following proposition holds on:

Proposition 5.1 The partial function generated by the normal algorithm $\mathcal{A}$ (which is usualy denoted also by), is the partial function generated by the pair $(|\!\!-_{\mathcal{A}}, |\!\!-_{\mathcal{A}}\cdot)$.

6. Let A and B be two, alphabets, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ two normal algorithms, the first one in A, the second one in B. Let Ψ be a partial function from A^* to B^*. We suppose that, for $P, Q \in A^*$, if $\mathcal{A}$: $P \,|\!\!- Q$ then $\mathcal{B}$: $\Psi(P) \,|\!\!=_n \Psi(Q)$ for some $n \geqslant 1$.

Proposition 6.1: For $W \in A$, if $\mathcal{A}(W)$ is undefined then also $\mathcal{B}(\Psi(W))$ is undefined.

Proof. $|\!\!=_n$ is a notation for $(|\!\!-)^n$. Hence this proposition represents corollary of Proposition 3.1

[1] Note that this notation infers that both $\psi(x)$ and $\psi(y)$ have a meaning (i.e. are defined)

[2] Usualy we denote $|\!\!-_{\mathcal{A}}(P) = Q$ by $P \,|\!\!-_{\mathcal{A}} Q$ or even by $\mathcal{A} : P \,|\!\!- Q$ (and similarly for $|\!\!-_{\mathcal{A}}\cdot$).

[3] Usualy we denote this also by $\mathcal{A} : P \,\overline{}|$

Now let us suppose that $A \subset B$, and that for $P, Q \in A^*$, if $\mathcal{A}$: $P \vdash Q$ then $\mathcal{A}$: $P \models_n Q$ for some $n \geqslant 1$. From Proposition 6.1 and taking $\Psi = I_A$ we get at once the following result:

Corollary 6.1 For $W \in A^*$, if $\mathcal{A}(W)$ is undefined, then $\mathfrak{B}(W)$ is undefined.

7. In the rest of this paper we shall show the use of the preceding results:

For a precise analysis we shall take a very simple example „The closure of an algorithm". (§ III, 2 from Markov(1)).

We wish to prove the following conditional equality:

$$\mathcal{A}(P) \simeq \mathcal{A}'(P)$$

Let us enclose the propositions from Markov (1) into brackets (for avoiding possible confusions or tedious expressions)

Then it is sufficient to prove that:

(2.2) $\mathcal{A} : P \vdash Q$ implies $\mathcal{A}' : P \vdash Q$

(2.3) $\mathcal{A} : P \vdash \cdot Q$ implies $\mathcal{A}' : P \vdash \cdot Q$

(2.4) $\mathcal{A} : P \urcorner$ implies $\mathcal{A}' : P \vdash \cdot P$

Using these propositions we prove (2.7) and subsequently (2.10) If $\mathcal{A}(P) = Q$ then $\mathcal{A}'(P) = Q$.

We get that if the left expression has a meaning, then the right one has also a meaning and they are equal to each other.

From (2.2) it follows that we can use the Corollary 6.1 and we get that:

If $\mathcal{A}(P)$ is unde fined, then $\mathcal{A}'(P)$, is also undefined or, which is the same, if $\mathcal{A}'(P)$ has a meaning, then $\mathcal{A}(P)$ has also a meaning.

The Propositions (2.5), (2.6), (2.9), (2.11) have been useless.

8. The example of the former section was chosen for its simplicity and clarity. One might perhaps argue that in this case the useless propositions are not difficult. One should be perfectly right *in this case*, but let us recall that we have chosed this example because we only wanted to show *the use* of our method.

In order to prove its *advantages*, we might take a bigger theorem in wich a conditional equality occurs: Theorem (2.1), „The composition of the algoritms" (§ III, 3 from Markov (1).

The sketch of its proof is now the following:

We can prove, as described in Markov (1), that if $\mathfrak{B}(\mathcal{A}(P))$ has a meaning, then $\mathfrak{L}(P)$ has also a meaning and they are equal to each other. To complete the proof, we need to prove also (2.46): if $\mathfrak{L}(P)$ has a meaning, then $\mathfrak{B}(\mathcal{A}(P))$ has also a meaning.

In order to achieve this goal we can choose the following way:

Firstly, we use corollary 6.1 to prove that if $\mathcal{A}(P)$ is undefined, then $\mathfrak{B}(P)$ is also undefined.

Secondly, we use Proposition 6.1 to prove that if $\mathcal{A}(P)$ but not $\mathcal{B}(\mathcal{A}(P))$ is defined, then $\mathcal{L}(P)$ is undefined (in this case we put $\Psi(P) = \alpha[P^{-})$

It is clear now that if $\mathcal{L}(P)$ has a meaning, then $\mathcal{B}(\mathcal{A}(P))$ has also a meaning. In this way we have proved (2.46). The propositions (2.20), (2.21,) (2.22). (2.41), (2.42), (2.43) were useless, and in this case they are not quite simple.

BIBLIOGRAPHY

|1| MARKOV, A.A.: *Teoria algorifmov*. Trudî Mat. Inst. im Steclova 38, 1951
|2| MARKOV, A.A.: *Teoria algorifmov*. Trudî Mat. Inst. im Steclova 42, 1954.

Received on 07.06. 1971

Computer Center of the University,
Bucharest.

O PROBLEMĂ DE AMPLASARE, CU VARIABILE BIVALENTE 0 ŞI 1, DEFINITĂ PRIN ELEMENTELE UNEI PROBLEME DE TRANSPORT

NICOLAE POPOVICIU

1 ENUNŢAREA PROBLEMEI

În urma unui studiu economic şi de prospecţiuni geologice şi geografice, se ajunge la concluzia că în m puncte $P_1, \ldots, P_m$ este posibil să se amplaseze m fabrici $F_1, \ldots, F_m$ (cîte una în fiecare punct), producătoare, de exemplu de materiale de construcţii. Facem următoarele ipoteze:

1. toate fabricile F_i produc acelaşi material: ciment sau cherestea sau ceramică, etc;

2. capacitatea de producţie a_i a fiecărei fabrici F_i este cunoscută din studiul amintit;

3. se cunosc n centre $L_1, \ldots, L_n$ unde se va folosi în cantităţi cunoscute $b_1, \ldots, b_n$ materialul produs;

4. se cunosc costurile c_{ij} de transportare a unei unităţi de material de la P_i la L_j.

Se cere să se indice $s \leqslant m$ puncte unde să se construiască fabricile $F_1, \ldots, F_s$ aşa încît cererile de material să fie satisfăcute, iar costul transportului să fie minim. Vom nota cu $\mathcal{A}$ problema enunţată mai sus. Organizăm datele problemei în tabelul 1.

Tabelul 1

	$L_1 \ldots\ldots L_j \ldots\ldots L_n$	
F_1	$\vdots$	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_i	$\ldots\ldots\ldots c_{ij} \ldots\ldots\ldots$	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_m	$\vdots$	A_m
	$b_1 \ldots\ldots b_i \ldots\ldots b_n$	

2. FUNDAMENTAREA ALGORITMULUI DE REZOLVARE A LUI $\mathcal{A}$

În cele ce urmează, vom folosi următoarele trei noţiuni relative la $\mathcal{A}$: soluţie, soluţie posibilă şi soluţie optimă.

Soluţia este un vector $X = (x_1, ..., x_m)$, $x_i = 0$ sau 1, $i = 1, ..., m$, x_i asociat cu $F_i \cdot x_i = 1$ are semnificaţia: se construieşte fabrica F_i în P_i, iar $x_i = 0$, nu se construieşte F_i. Componentele lui X le presupunem ordonate astfel: F_m, F_{m-1}, ..., F_2, F_1. *Soluţia posibilă* este soluţia X care asigură satisfacerea cererilor de material.

Soluţia optimă este soluţia posibilă care asigură costul minim al transportului cantităţilor cerute de material, de la fabricile producătoare la unităţile consumatoare.

Notăm cu $\mathcal{X}$ mulţimea soluţiilor problemei $\mathcal{A}$. Se observă că $\mathcal{X}$ conţine 2^m soluţii X_k:

$$\mathcal{X} = \begin{Bmatrix} (0, 0, ..., 0, 1) \\ (0, 0, ..., 1, 1) \\ (0, 0, ..., 1, 0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (1, 1, ..., 1, 0) \\ (1, 1, ..., 1, 1) \end{Bmatrix}$$

unde $0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1$. Numerotarea soluţiilor se face automat, dacă fiecărei soluţii îi asociem numărul binar care are ca cifre componentele lui X. Atunci (0, 0, ..., 1, 0, 0) reprezintă pe X_4, etc.

Asociem mulţimii $\mathcal{X}$ graful $G(m)$ definit astfel

— fiecare soluţie X_k generează un nod în graf;

— există un arc care merge de la X_a la X_b ori de cîte ori X_b conţine pe X_a şi are o componentă şi numai una, egală cu 1, în plus faţă de X_a.

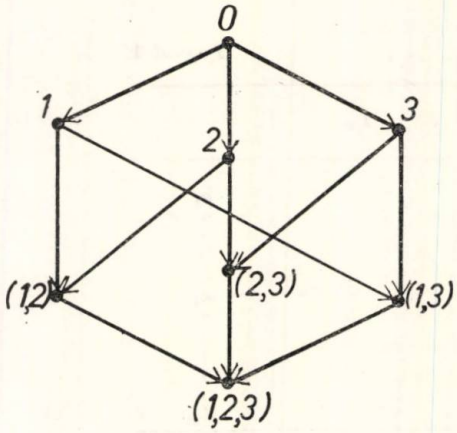


Fig. 1

Corespondenţa dintre elementele lui $\mathcal{X}$ şi nodurile lui $G(m)$ este biunivocă. De aceea, în continuare vom identifica soluţiile lui $\mathcal{A}$ cu nodurile grafului.

Pentru $m = 3$, graful $G(3)$ este indicat în fig. 1.

Nodurile grafului indică numai punctele unde este posibilă construirea fabricilor F_i. De exemplu (1,3) spune că se construiesc F_1 şi F_3, dar nu se construieşte F_2. Acest nod corespunde lui $X; = (1, 0, 1)$.

Asociem fiecărei soluţii X_k o problemă de transport T_k, definită de $L_1, ..., L_n$ şi de F_i care corespund lui $x_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$ din X_k. Pentru

$G(3)$, T_5 cuprinde F_1 şi F_3 cu capacităţile de producţie a_1 şi a_3, împreună cu $L_1, \ldots, L_n$.

Notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor posibile ale lui $\mathcal{A}$. Spunem că soluţia X_k este soluţie posibilă a lui $\mathcal{A}$, dacă problema T_k are soluţie posibilă, adică dacă suma cererilor de material nu depăşeşte suma cantităţilor produse, relative la T_k. Dacă $X_k \in \mathcal{S}$, notăm cu Y_k^* soluţia optimă a problemei T_k şi cu $\mathcal{V}_k(Y_k^*)$ valoarea problemei T_k, adică valoarea funcţiei de optimizat asociată lui T_k, pentru Y_k^*.

3. ALGORITMUL DE REZOLVARE AL PROBLEMEI DE AMPLASARE

Algoritmul care urmează este orientat spre rezolvarea problemei $\mathcal{A}$ cu ajutorul unui calculator electronic. Vom presupune ca în biblioteca de programe a centrului de calcul există programul de rezolvare a unei probleme T de transport. Numim acest program TRANSP pentru o referire uşoară la el.

Algoritmul de rezolvare a lui $\mathcal{A}$ este următorul:

1. Se ia soluţia X_k.

a. Dacă $X_k \in \mathcal{S}$, cu ajutorul lui TRANSP se determină soluţia optimă Y_k^* şi $\mathcal{V}_k(Y_k^*)$. Se memorează k, $\mathcal{V}_k$ şi Y_k^*. Se trece la punctul 2;

b. Dacă $X_k \notin \mathcal{S}$, se trece la punctul 2;

2. a. Dacă $k = 2^m - 1$, se trece la punctul 3;

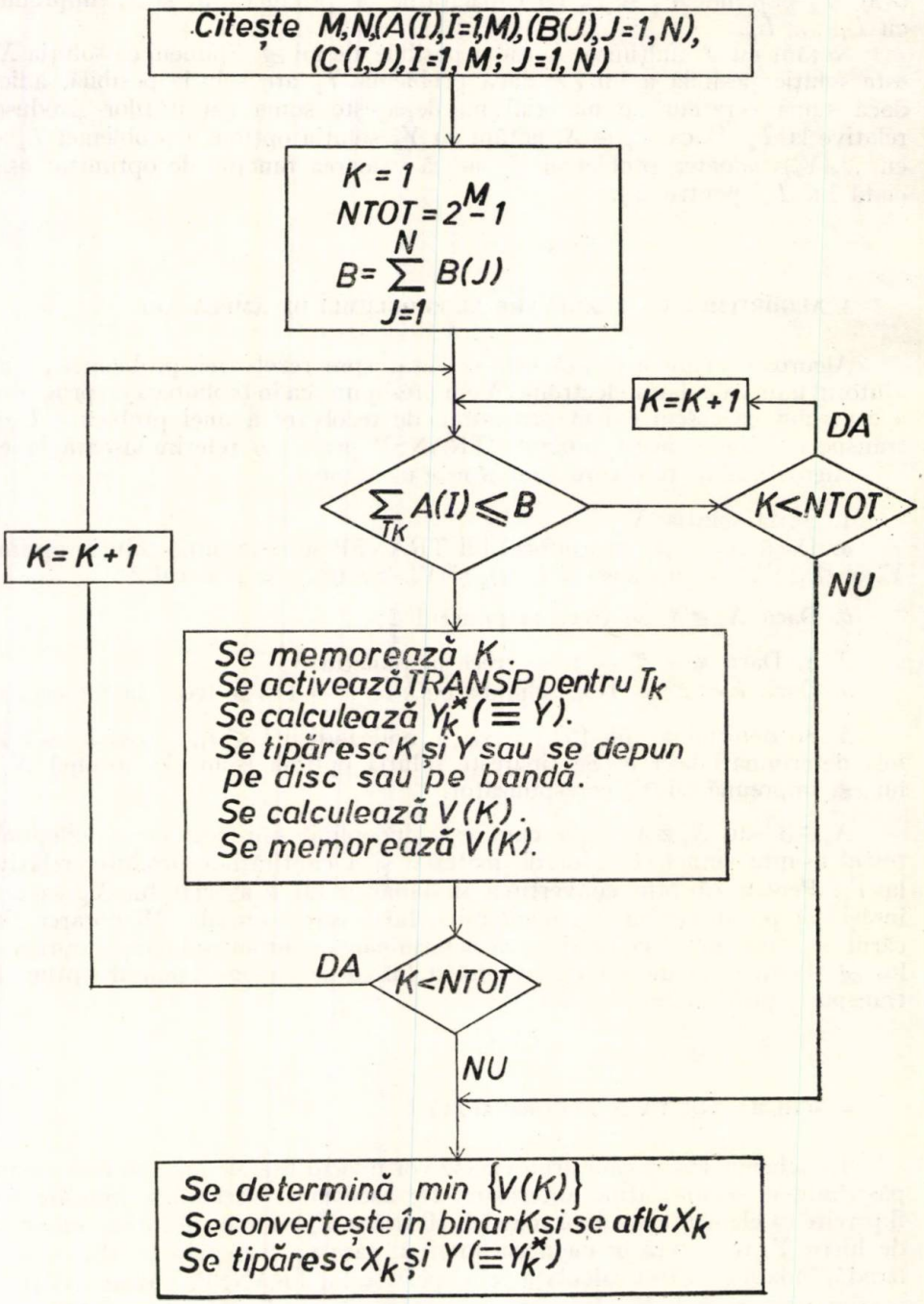
b. Dacă $k < 2^m - 1$ se schimbă cu k cu $k + 1$ şi se trece la punctul 1;

3. Se determină min $\{\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_p}\}$, unde indicii $1 \leqslant i_1, \ldots, i \leqslant 2^m - 1$ au fost determinaţi la 1 *a*. Se tipăreşte soluţia optimă (soluţiile optime) X a lui $\mathcal{A}$, împreună cu Y_k^* corespunzător.

$X_k \in \mathcal{S}$ sau $X_k \notin \mathcal{S}$ după cum este îndeplinit sau nu este îndeplinit testul asupra sumei cererilor de material şi a cantităţilor produse, relative la T_k. Pentru că prin convertirea în binar a lui k asociat lui X_k se află însăşi componentele lui X_k, memorarea lui k este esenţială. Memorarea fiecărui $\mathcal{V}_k$ determinat la 1*a* ajută la determinarea soluţiei (soluţiilor) optime a lui $\mathcal{A}$. Pentru fiecare soluţie optimă a lui $\mathcal{A}$ se cunoaşte planul optim de transport, prin memorarea lui Y_k^*.

4. SCHEMA LOGICĂ A ALGORITMULUI

În schema logică care urmează, se vor înlocui literele mici cu litere mari, păstrîndu-se semnificaţiile anterioare. De asemenea, variabilele indicate vor fi privite ca elemente ale unor matrici. Matricea Y_k^* se înlocuieşte cu o matrice de lucru Y, rezervată în memoria internă, care va fi depusă pe disc sau pe bandă, îndată ce a fost calculată prin apelarea lui TRANSP. Valoarea $\mathcal{V}_k(Y_k^*)$ o vom nota prin $V(K)$. Prin aceste notaţii schema logică poate fi orientată


Citeşte M,N,(A(I),I=1,M),(B(J),J=1,N),
(C(I,J),I=1,M; J=1,N)
K = 1
NTOT = 2^M - 1
B = Σ B(J)
J=1
K=K+1
DA
Σ A(I) ≤ B
TK
K<NTOT
K=K+1
NU
Se memorează K.
Se activează TRANSP pentru Tk
Se calculează Yk* (≡ Y).
Se tipăresc K şi Y sau se depun
pe disc sau pe bandă.
Se calculează V(K).
Se memorează V(K).
DA
K<NTOT
NU
Se determină min {V(K)}
Se converteşte în binar K şi se află Xk
Se tipăresc Xk şi Y (≡ Yk*)

pentru programarea algoritmului în FORTRAN. În acest caz, comparaţia $K < NTOT$ din schema logică care urmează, este util să fie realizată prin instrucţiunea de ciclare DO a K = 1, NTOT, unde a este eticheta de sfîrşit a ciclului *DO*.

5. EXEMPLU NUMERIC REZOLVAT.

Fie de rezolvat problema de amplasare definită de tabelul

	F_3	F_2	F_1	
L_1	6	2	7	5
L_2	3	4	8	12
L_3	1	5	5	6
L_4	2	9	3	11
	10	15	25	50/34

Se observă că $\mathcal{S} = \{X_3, X_5, X_7\}$. Problemele de transport asociate T_3, T_5, T_7 au respectiv soluţiile optime:

$$Y_3^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 8 \\ 0 & 6 \\ 0 & 11 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Y_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad Y_7^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

(Elementele ultimei linii din fiecare soluţie corespund consumatorului fictiv introdus de algoritmul de rezolvare a unei probleme de transport).
Se găseşte ca $\mathcal{V}_3(Y_3^*) = 153$; $\mathcal{V}_5(Y_5^*) = 144$; $\mathcal{V}_7(Y_7^*) = 93$
Pentru ca min $\{153, 144, 93\} = 93$, soluţia optimă a problemei de amplasare este X_7, iar planul optim de transport este Y_7^*.

BIBLIOGRAFIE

[1] BALAS, E., *Programarea liniară cu variabile bivalente*, Studii de statistică, 3, 1964.
[2] BALAŞ, E., *An additive algorithm for soluing linear programs with zero-one variables*, Operations Research, 13, 4, 1965.
[3] NĂDEJDE, I., BERGTHALLER, B., ZIDĂROIU, C., SBURLAN, S., *Probleme de cercetare operaţională*, Editura Academiei, Bucureşti, 1971.

Primită la 10 mai 1972

Centrul de Calcul al
Universităţii, Bucureşti.

A DECISION PROBLEM WITH 0,1 VORIABLES.

ABSTRACT

There are m points $P_1, ..., P_m$where it is possible to build m factories $F_1, ..., F_m$(one factory for each point). All the factories yield the same product (material), which is necessary in n different points $L_1, ...,L_n$ in the known quantities $b_1, .., b_n$ respectively. Let us denote by a_i the production capacity of F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, and c_{ij} the unit product transportation cost from P_i to L_j.

The problem asks to indicate $s \leqslant m$ points where $F_1, ..., F_s$ have to be built so that the demands $b_1, ..., b_n$ can be satisfied with a minimum transportation cost. We denote by $\mathcal{A}$ this problem. $\mathcal{A}$ contains boolean variables.

The paper has 5 section. Section 1 defines the problem $\mathcal{A}$. Section 2 contains three definitions about the problem solutions. We associate a graph $G(m)$ tc $\mathcal{A}$ and for each possible solution we associate a transportation problem. Section 3 gives the solving algorithm of $\mathcal{A}$. Section 4 contains a flow-chart describing the algorithm discussed. in Section 3. The flow-chart is orientd towards the solving problem by using a computer. Section 5 gives a solved numerical example for $n = 3$ and $m = 4$.

ASUPRA EXTENSIUNII DERIVATEI LIE LA TENSORI CE DEPIND DE PUNCT ŞI DIRECŢIE

C. F. RADU

În lucrarea de faţă se găseşte expresia derivatei Lie a tensorilor ce depind de punct şi direcţie printr-o metodă ce are la bază o teoremă demonstrată de Willmore în 1960.

Fie V_n o varietate diferenţiabilă pe care se consideră un grup continuu de transformări şi căruia îi asociem transformarea infinitesimală:

$$\tilde{x}^i = x^i + X^i(x)\,\delta t \tag{1}$$

unde $X^i(x)$ reprezintă componentele unui cîmp de vectori $X(x)$ pe V_n Kentaro-Yano a arătat că dacă $\Omega(x)$ reprezintă un obiect geometric pe V_n (în particular poate fi o funcţie sclalară $f(x)$, un vector $v^i(x)$, un teusor $T^{i_1 \ldots i_r(x)}_{j_1 \ldots j_s}$), interpretînd relaţia (1) ca transformare punctuală respectiv ca trausformare de coordonate se poate calcula diferenţa $\Omega(\tilde{x}) - \tilde{\Omega}(\tilde{x})$ notată altfel prin $(\underset{X}{\mathcal{L}}\Omega)\,\delta t$ şi numită diferenţială Lie, unde $\underset{X}{\mathcal{L}}\Omega$ este derivata Lie a obiectului Ω în raport cu cîmpul X. Pentru $f(x)$, $v^i(x)$, $T^{i_1 \ldots i_r(x)}_{j_1 \ldots j_s}$ au fost găsite expresiile:

$$\underset{X}{\mathcal{L}} f(x) = X^i\,\partial_i f(x), \quad \underset{X}{\mathcal{L}} v^i = X^m \partial_m v^i - v^m \partial_m X^i$$

$$\underset{X}{\mathcal{L}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = X^l \partial^l T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} - T^{l\, i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}\,\partial_l X^{i_1} - \ldots - T^{i_1 \ldots l}_{j_1 \ldots j_s}\,\partial_l X^{i_r} +$$

$$+ T^{i_1 \ldots i_r}_{j_2 \ldots j_s}\,\partial_{j_1} X^l + \ldots\ldots + T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots l}\,\partial_{j_s} X^i$$

unde prin ∂_l am notat $\dfrac{\partial}{\partial x^l}$

Fie acum o varietate diferenţiabilă V_n, cu proprietatea că în fiecare punct al ei este dată o direcţie arbitrară dx^i notată $\dot{x}^i$ supusă condiţiei ca la o transformare locală de coordonate pe V_n să avem:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1 \ldots\ldots x^n) \\ \dot{x}^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\,\dot{x}^j \qquad (i' = 1 \ldots n;\ j = 1 \ldots n) \end{cases} \tag{2}$$

Un sistem de cantităţi $T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x})$ sînt componentele unui tensor depinzînd de punct şi direcţie pe V_n dacă la o transformare de tip (2) se schimbă după legea:

$$(3) \qquad T^{i'_1 \ldots\ldots i'_r}_{j'_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x}) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i}1} \cdot \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i}2} \cdots\cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdot \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}} \cdots\cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} \cdot T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x})$$

Urmîndu-l pe Willmore vom defini operatorul de derivare Lie, notat cu D.

Definiţie: Se numeşte derivare în algebra unui cîmp de tensori $T(V_n)$ o aplicaţie $D : T(V_n) \to T(V_n)$ (duce deci un tensor tot într-un tensor) care satisface condiţiile:

a) aplicaţia păstrează tipul tensorului
b) aplicaţia este liniară
c) aplicaţia este comutabilă cu contracţia indicilor
d) aplicaţia satisface regula lui Leibniz pentru produs tensorial:

$$D(K \otimes L) = (D\,K) \otimes L + K \otimes (D\,L), \quad K \text{ şi } L \text{ tensori}$$

Vom da acum teorema lui Willmore:

Dacă este cunoscut efectul lui D asupra cîmpului de sclari şi asupra cîmpului de vectori contravarianţi pe V_n, atunci se poate extinde în mod unic acest operator pentru orice tensor din $T(V_n)$.

Este uşor de verificat că folosind această teoremă şi definindu-l pe $\underset{X}{D} f(x) = X^i \partial^i f$, $\underset{X}{D} v^i(x) = X^m \partial_m v^i - v^m \partial_m X^i$ se va obţine pentru $\underset{X}{D}\, T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x)$ expresia dată de Kentaro — Yano.

Ne propunem să găsim $\underset{X}{D}\, T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x})$ folosind teorema anunţată mai sus

Vom defini operatorul de derivare Lie $\underset{X}{D}$ pentru scalari $f(x, \dot{x})$ şi pentru vectori contravarianţi $Y(x, x)$. Dacă $X(x)$ este un cîmp de vectori independent de direcţie atunci:

(4) $\underset{X}{D} : f(x, \dot{x}) \to Xf(x, \dot{x})$ înţelegînd prin aceasta

(4′) $\underset{X}{D} f(x, \dot{x}) = X f(x, \dot{x}) = (X^m \partial_m + \dot{x}^k \partial_k X^m \dot{\partial}_m) f(x, \dot{x})$

(5) $\underset{X}{D} : Y(x, \dot{x}) \to [X, Y]$ unde

(5′) $\underset{X}{D}\, Y = [X, Y] = X\,Y - Y\,X$ aplicat numai pentru $f(x)$ independent de $\dot{x}$. Mai sus am notat $\dot{\partial}_m = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^m}$ şi $\partial_m = \dfrac{\partial}{\partial x^m}$

Vom calcula expresia finală pentru $\underset{X}{D}\, Y$. Pentru aceasta vom porni de la $(XY - YX)$ aplicat unei funcţii sclare $f(x)$ adică $(XY - YX)\, f = X(Yf) - Y(Xf)$

Dacă Y^p reprezintă componentele vectorului $Y(x, x)$ atunci

$$X(Yf) = X(Y^p\partial_p f + \dot{x}^s\partial_s y^p\dot{\partial}_p f) = X(Y^p\partial_p f) = X^m\partial_m(Y^p\partial_p f) +$$

$$+ \dot{x}^k\partial_k X^m\partial_m(Y^p\dot{\partial}_p f) = X^m\partial_m Y^p\partial_p f + X^m Y^p\,\partial^2_{mp} f + \dot{x}^k\partial_k X^m\partial_m Y^p\dot{\partial}_p f =$$

$$= (X^m\partial_m Y^p\partial_p + X^m Y^p\partial^2_{mp} + \dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m Y^p\partial_p) f$$

Analog îucrînd sau înlocuind direct pe X cu Y obținem

$$Y(X f) = (Y^m\partial_m X^p\partial_p + Y^m X^p\partial^2_{mp} + x\,\dot{x}^k\partial_k Y^m\partial_m X^p\dot{\partial}_p) f =$$

$$= (Y^m\partial_m X^p\partial_p + Y^m X^p\partial^2_{mp}) f \text{ deoarece } \dot{\partial}_m X^p = \frac{\partial X^p}{\partial \dot{x}^m} = 0.$$

Rezultă imediat făcînd diferența $X(Y f) - Y(X f)$ că:

$$\underset{X}{D}\, Y = [X, Y] = (X^m\partial_m Y^p - Y^m\partial_m X^p + \dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m Y^p)\,\partial_p$$

iar

(6) $$D\, Y^p(x, \dot{x}) = X^m\partial_m Y^p - Y^m\partial_m X^p + \dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m Y^p$$

Avînd în acest moment expresiile lui $\underset{X}{D}\, f(x, \dot{x})$ și $\underset{X}{D}\, Y^p(x, \dot{x})$ se pot verifica ușor proprietățile a, b, c, d cerute pentru un operator de derivare $\underset{X}{D}$.

Ne va interesa acum expresia lui $\underset{X}{D}$ pentru un vector convariant $u_i\,(x, \dot{x})$.

Pentru a găsi $D\, u_i\,(x, \dot{x})$ vom pleca de la expresia

(7) $$u_i v^i = f(x, \dot{x}), \text{ unde } v^i\,(x, \dot{x}) \text{ — vector contravariant}$$

Aplicînd operatorul $\underset{X}{D}$ definit mai sus avem pentru ambii membri din (7)

$$(\underset{X}{D}\, u_i)\, v^i + u_i(\underset{X}{D}\, v^i) = X^m\partial_m(u_i\, v^i) + \dot{x}^k\partial_k X^m\partial_m(u_i\, v_i) \text{ sau}$$

$$(Du_i)\, v^i + u_i(X^m\partial_m v^i - v^m\partial_m X^i + x\dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m v^i) =$$

$$= X^m(\partial_m u^i)\, v^i + X^m u_i\partial_m v^i + \dot{x}_k v^i\partial_k X^m\dot{\partial}_m u_i + \dot{x}^k u^i\partial^k X^m\dot{\partial}_m v^i$$

Reducînd termenii asemenea obținem

$$(\underset{X}{D}\, u_i - X^m\partial_m u_i - u_m\partial_i X^m - \dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m u^i)\, v^i = 0$$

Dar cum $v^i(x, \dot{x})$ este arbitrar obținem

(8) $$\underset{X}{D} u^i(x, \dot{x}) = X^m\partial^m u_i + u_m\partial_i X^m + \dot{x}^k\partial_k X^m\dot{\partial}_m u_i$$

Vom trece la găsirea expresiei pentru $DT^{i_1 \ldots\ldots i}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x})$ avînd la dispoziție

$$\underset{X}{D} f(x, \dot{x}), \underset{X}{D} v^i(x, \dot{x}x), \underset{X}{D} u_i(x, \dot{x}).$$

Fie sistemul de vectori contravarianți $\{v^{\mathcal{J}_1}_{(1)}(x, \dot{x}), \ldots, v^{\mathcal{J}_s}_{(s)}(x, \dot{x}\}$ și sistemul de vectori convrianți $\{u^{(1)}_{i_1}(x, \dot{x}), \ldots, u^{(r)}_{i_r}(x, \dot{x}\}$ iar $T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s}(x, \dot{x})$ componentele unui tensor oarecare T.
Formăm expresia:

$$T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} \cdot u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r} \ldots v^{\mathcal{J}_1}_{(1)} \ldots v^{\mathcal{J}_s}_{(s)} = f(x, \dot{x}) \tag{9}$$

Vom aplica operatorul $\underset{X}{D}$ în (9) ținînd cont de regula lui Leibniz pe deoparte și pe de altă parte folosind expresia lui $\underset{X}{D} f(x, \dot{x})$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\underset{X}{D}\, T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} \cdot u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{j_1}_{(1)} \ldots v^{j_s}_{(s)} &+ T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} (\underset{X}{D} u^{(1)}_{i_1})\, u^{(2)}_{i_2} \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{j_1}_{(1)} \ldots v^{j_s}_{(s)} + \ldots\ldots \\
&+ T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots (\underset{X}{D} u^{(k)}_{i_k}) \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{j_1}_{(1)} \ldots v^{j_s}_{(s)} + \\
&+ T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(1)}_{i_1} (\underset{X}{D} v^{j_1}_{(1)})\, v^{j_2}_{(2)} \ldots v^{j_s}_{(s)} + \ldots \\
&+ T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{j_1}_{(1)} \ldots (\underset{X}{D} v^{j_t}_{(t)}) \ldots v^{j_s}_{(s)} + \\
&+ T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{j_1}_{(1)} \ldots \ldots \underset{X}{D} v^{j_s}_{(s)} = \\
&= X^m \partial_m (T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r} \cdot v^{\mathcal{J}_1}_{(1)} \ldots v^{\mathcal{J}_s}_{(s)}) + \\
&+ \dot{x}^l X^m \partial_m (T^{i_1 \ldots\ldots i_r}_{j_1 \ldots\ldots j_s} u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r}\, v^{j_1}_{(1)} \ldots v^{j_s}_{(s)})
\end{aligned}$$

Convenim să notăm prescurtat $u^{1 \ldots\ldots r}_{j_1 \ldots\ldots i_r} = u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(r)}_{i_r}$,

$$v^{j_1 \ldots\ldots j_s}_{1 \ldots\ldots s} = v^{\mathcal{J}_1}_{(1)} \ldots v^{j_s}_{(s)}$$

iar $u^{(1)}_{i_1} \ldots u^{(k-1)}_{i_{k-1}} \cdot u^{(k+1)}_{i_{k+1}} \ldots u^{(r)}_{i_r} = u^{1 \ldots \hat{k} \ldots r}_{i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_r}$, $(k = 1, 2 \ldots r)$

$$v^{j_1}_{(1)} \ldots v^{j_{t-1}}_{(t-1)} \cdot v^{j_{t-1}}_{(t+1)} \ldots v^{j_s}_{(s)} = v^{j_1 \ldots \hat{j}_t \ldots j_s}_{1 \ldots \hat{t} \ldots s}, \quad (t = 1, 2 \ldots s)$$

Înlocuind în membrul întîi al ultimei egalități expresiile

$$\begin{cases} \underset{X}{D} u^{(k)}_{i_k} = X^m \partial_m u^{(k)}_{i_k} + u^{(k)}_m \partial_{i_k} X^m + \dot{x}^l \partial_l X^m \partial_m u^{(k)}_{i_k} \\ \underset{X}{D} v^{j_t}_{(t)} = X^m \partial_m v^{j_t}_{(t)} - v^m_{(t)} \partial_m X^{j_t} + \dot{x}^l \partial_l Y^m \partial_m v^{j_t}_{(t)} \end{cases} \tag{10}$$

iar în membrul al doilea efectuînd derivările ∂_m, $\dot{\partial}_m$ și folosind notația prescurtată de mai sus obținem:

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & \underset{X}{D} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_t} \Bigg[\sum_{k=1}^{r} (X^m \partial_m u^{(k)}_{i_k} + \\
& + u^{(k)}_m \partial_{i_k} X^m + \dot{x}^l \partial_l X^m \dot{\partial}_m u^{(k)}_{i_k}) \, u^{1 \dots \hat{k} \dots r}_{i_1 \dots \hat{i} \dots i_r} \Bigg| v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{t=1}^{s} (X^m \partial_m v^{j_t}_{(t)} - v^m_{(t)} \partial_m X_{j_t} + \\
& + \dot{x}^l \partial_l X^m \dot{\partial}_m v^{j_t}_{(t)}) \, v^{j_1 \dots \hat{j_t} \dots j_s}_{1 \dots \hat{t} \dots s} \Bigg] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} = X^m \partial_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} \cdot v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + X^m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{k=1}^{r} \partial^m u^{(k)}_{i_k} u^{1 \dots \hat{k} \dots r}_{i_1 \dots \hat{i_k} \dots i_r} \Bigg] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + X^m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{t=1}^{s} \partial_m v^{j_t}_{(t)} \cdot v^{j_1 \dots \hat{j_t} \dots j_s}_{1 \dots \hat{t} \dots s} \Bigg] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} + \\
& + \dot{x}^l \partial_l X^m \dot{\partial}_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + \dot{x}^l \partial_l X^m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{k=1}^{r} \dot{\partial}_m u^{(k)}_{i_r} u^{1 \dots \hat{k} \dots r}_{i_1 \dots \hat{i_k} \dots i_r} \Bigg] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + \dot{x}^l \partial_l X^m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{t=1}^{s} \dot{\partial}_m v^{j_t}_{(t)} v^{j_1 \dots \hat{j_t} \dots j_s}_{1 \dots \hat{t} \dots s} \Bigg] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r}
\end{aligned}
$$

În relația (11) redueem termenii asemenea și obținem

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad & \underset{X}{D} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{k+1}^{r} u^{(k)}_m \partial_{i_k} X^m u^{1 \dots \hat{k} \dots r}_{i_1 \dots \hat{i_k} \dots i_r} \Bigg] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} - \\
& - T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Bigg[\sum_{t=1}^{s} v^m_{(t)} \partial_m X^{j_t} v^{j_1 \dots \hat{j_t} \dots j_s}_{1 \dots \hat{t} \dots s} \Bigg] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} = X^m \partial_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \\
& + \dot{x}^l \partial_l X_m \dot{\partial} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s}
\end{aligned}
$$

Dar ținînd cont că pentru $k = 1 \dots r$; $t = 1, 2 \dots s$ avem

$$
u^{(k)}_m u^{1 \dots \hat{k} \dots r}_{i_1 \dots \hat{i_k} \dots i_r} = u^{1 \dots k \dots r}_{i_1 \dots m \dots i_r} \text{ respectiv } v^m_{(t)} v^{j_1 \dots \hat{j_t} \dots j_s}_{1 \dots \hat{t} \dots s} = v^{j_1 \dots m \dots}_{2 \dots t \dots s}
$$

relația (12) devine:

$$(12') \qquad \underset{X}{D} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[\sum_{k=1}^{r} \partial_{i_k} X^m u^{1 \dots k \dots r}_{i_1 \dots m \dots i_r} \right] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} -$$

$$- T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[\sum_{t=1}^{s} \partial_m X^{j_t} v^{j_1 \dots m \dots j_s}_{1 \dots t \dots s} \right] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} = X^m \partial_m T^{i_1 \dots i_r}_{i_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} +$$

$$+ \dot{x}^l \partial_l X^m \dot{\partial}_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s}$$

Deoarece în relația (12′) la termenii care conțin $\sum_1^r$, $\sum_1^s$ avem sumare după indicele m dar și după indicii $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots i_r$; $j_1, j_2, \dots, j_t, \dots j_s$, pentru fiecare k ficsat (1, 2, ... r) facem schimbarea indicilor de sumare, schimbînd pe rînd m cu i_1, m cu i_2 ,... m cu i_r iar pentru fiecare t fixat (1, 2, ... s) schimbînd m cu j_1, m cu j_2, ..., m cu j_s. Acești termeni devin:

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[\sum_{k=1}^{r} \partial_{i_k} X^m u^{1 \dots k \dots r}_{i_1 \dots m \dots i_r} \right] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} =$$

$$= \Big[T^{m i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X_{i_1} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} + T^{i_1 m \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X^{i_2} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} +$$

$$+ \dots + T^{i_1 \dots m \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X_{i_k} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} + \dots T^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots i_s} \partial_m X^{i_r} u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} \Big] v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s}$$

Analog

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[\sum_{t=1}^{s} \partial_m X^{j_t} v^{j_1 \dots m \dots j_s}_{1 \dots t \dots s} \right] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} =$$

$$= [T^{i_1 \dots i_r}_{m j_2 \dots j_s} \partial_{j_1} X^m v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 m \dots j_s} \partial^{j_2} X^m v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} +$$

$$+ \dots + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_{j_t} X^m v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} + \dots + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots m} \partial_{g_s} X^m v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s}] \cdot u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r}$$

Introducînd aceste expresii în (12′) și grupînd convenabil termenii avem:

$$[\underset{X}{D} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + T^{m i_2 \dots i_s}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X^{i_1} \dots + T^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X^{i_r} -$$

$$- T^{i_1 \dots i_r}_{m j_2 \dots j_s} \partial_{i_1} X^m - \dots - T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots m} \partial_{j_s} X^m - X^m \partial_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} -$$

$$- \dot{x}^l \partial_l X^m \dot{\partial}_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}] u^{1 \dots r}_{i_1 \dots i_r} v^{j_1 \dots j_s}_{1 \dots s} = 0$$

Cum vectorii $u^{(1)}_{i_1}, \dots u^{(r)}_{i_r}$, $v^{j_1}_{(1)}, \dots v^{j_s}_{(s)}$ au fost aleși arbitrari din ultima relație decurge expresia căutată a derivatei Lie pentru tensorul

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} (x, \dot{x})$$

$$(13) \qquad \underset{X}{D} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = X^m \partial_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - T^{m i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X^{i_1} - \dots -$$

$$- T^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots j_s} \partial_m X_{i_r} + T^{i_1 \dots i_r}_{m j_2 \dots j_s} \partial_{j_1} X^m + \dots + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots m} \partial_{j_s} X^m + \dot{x} \partial X^m \dot{\partial}_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

Pentru tensori $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x)$, din (13) se obține expresia dată de Kentoro-Nano întrucît ultimul termen din (13) dispare. Dacă facem contracția a doi indici, $\underset{X}{D}$ este comutabil cu operația de contracție.

În adevăr notîud $T^{i_1 \dots i_r}_{i_1 j_2 \dots j_s} = \widetilde{T}^{i_2 \dots i_r}_{j_2 \dots j_s}$ se observă că în expresia (13) se reduc termenii asemenea $T^{m i_2 \dots i_r}_{i_1 \dots j_s} \partial_m X^{i_1}$ și $T^{i_1 \dots i_r}_{m \dots j_s} \partial_{i_1} X^m$ și are loc deci

$$D \widetilde{T}^{i_2 \dots i_r}_{j_2 \dots j_s} = (D T^{i_1 \dots i_r}_{\vartheta_1 \dots j_s})_{i_1 = \vartheta_1}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. VRĂNCEANU GH. *Lecții de geometrie diferențială*. București, Ed. Academiei Vol. III|1960.
2. WILLMORE T.J.: *The Definition of Lie derivative*. (Proc. Edinburg Math. Soc. (2) 1960/61
3. YANO-KENTARO: *The Theory of Lie derivatives and its applications* Amsterdam-Groningen

Primit la redacție la 5.II.1972 Institutul politehnic București

SUR L'EXTENSION DE LA DÉRIVÉE LIE AUX TENSEURS QUI DÉPENDENT DU POINT ET DE LA DIRECTION.

RÉSUMÉ

Soit V_n une variété différentiable et dans n'importe quel point (x^i) d'elle une direction arbitraire (dx^i) notée $(\dot{x}^i)$, soumise à la condition et à la transformation locale de coordonnées de V_n:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \\ \dot{x}^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\vartheta}} \cdot \dot{x}^{\vartheta} \end{cases} \qquad (i', j = 1, 2, \dots, n)$$

Les tenseurs $T(x, \dot{x})$ seront definis par la loi de changement des composantes $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x, \dot{x})$ par rapport á la transformation (1).

Nous définirons un opérateur de dérivation Lie noté $\underset{X}{D}$, par rapport au champ de vecteurs $X(x)$, pour les scalaires $f(x, \dot{x})$ et les vecteurs $v^i(x, \dot{x})$.

En utilisant un théorème demontré par T.J. Willmore, nous pouvons connaître uniquement l'opérateur $\underset{X}{D}$ pour tout tenseur $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x, \dot{x})$.

STRONG EQUILIBRIUM POINTS IN THE NONCOOPERATIVE GAMES THEORY

ANTON ŞTEFĂNESCU

A strong equilibrium point is formed by the dominant strategies of the all players of a noncooperative game. This paper contains some discussions about the properties of the strong equilibrium points and the valuation of the probability that a finite game should have a pure strong equilibrium point.
The main result estabilishes a neccesary and sufficient condition that a game should have a strong equilibrium point.

§ 1. INTRODUCTION

In the theory of the noncooperative games, an important part is taken by the equilibrium point notion which consists — in a certain way — the equivalent of the saddle point of the frame of the two person, zero — sum game theory.

More often, it is considered that the participants at a game act theirs strategies in a free and independent manner so that, the set of the plays appears as the Cartesian product of the individual strategies sets.

A different situation may be when we presume the existence of a coordinating factor, which limit the freedom of the players actions. In such a case, the set of the plays is reduced to a subset of the product of the strategies spaces.

In the describing of a game we must define the following factors:

— Each player will be denoted with a positive integer i, $(i = 1, 2, ..., n)$

— A play of the game will be denoted by a vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, each x_i will denote the strategie chosen by the i player.

— $\mathcal{S}$ the set of all plays will be considered as a subset of an Euclidian space $E^m = \prod_{i=1}^{n} E^{m_i}$, ($E^{m_i}$, is the space in which the i player's choises are made)

Generally, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times ... \times \mathcal{X}_n$, where $\mathcal{X}_i \subseteq E^{m_i}$ is **i** player's set of strategies.

— To each player i we shall associate a pay-off function $F_i: \mathcal{S} \to R$ which, for every $x \in \mathcal{S}$ will estabilishes the gain due to his.

We shall denote, throughaut x/y_i for the play obtained by the replacing the x_i component of the $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ with the y_i component of the $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{S}$

Also we put $X_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ and we write $x = (X_i; x_i)$.

For each $x \in \mathcal{S}$ let be:

$T(x) = \{x' \in \mathcal{S} \mid x/x'_i \in \mathcal{S}$ for all $i = 1, 2, ..., n\}$

§ 2. EQUILIBRIUM POINTS AND STRONG EQUILIBRIUM POINTS.

The „equilibrium point" concept has been introduce by Nash. A precision in the definition of this notion is imposed, in order to make the distinction between $\mathcal{S} = \mathcal{X}$ and $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ cases.

Definition 1. A play $x^* \in \mathcal{S}$ is an local equilibrium point (L.E.P.) of the game Γ, if for each $x \in \mathcal{S}$ with $x \in T(x^*)$ and for every $i = 1, 2, ..., n$

$$F_i(x^*) \geqslant F_i(x^*/x_i) \tag{1}$$

Definition 2. A play $x^* \in \mathcal{S}$ is a global equilibrium point (G.E.P.) of the game Γ if the inequality (1) is true for all $x \in \mathcal{S}$. (Obviously, for this is necessary that $T(x^*) = \mathcal{S}$)

Remark. If $\mathcal{S} = \mathcal{X}$, then every L.E.P. is a G.E.P. too.

An equilibrium point assures a fair manner of play for all participants, in the sense that once adopted by $n - 1$ players offers the highest gain to the n player. However, if one of the participants doesn't adopt the indicated strategie by the equilibrium point, the advantage presented by this point desappears for the other players.

The best situation would be that, according to which, each player could choose a manner of playing which should offer him a maximum gain regardless of the other participants's choises. Of course, existence of such a „dominant" strategie is harder to assure.

Definition 3. A play $x^* \in \bigcap_{x \in \mathcal{S}} T(x)$ is named a strong equilibrium point (S.E.P.) of game Γ, if for each $x \in \mathcal{S}$ and every $i = 1, 2, ..., n$,

$$F_i(x/x_i^*) \geqslant F_i(x) \tag{2}$$

Lemma 1. If $\bar{x} \in \bigcap_{x \in \mathcal{S}} T(x)$, then $\mathcal{S} = T(\bar{x})$

Proof: If $\bar{x} \in \bigcap_{x \in \mathcal{S}} T(x)$, then,

$$x/\bar{x}_i \in \mathcal{S}, \text{ for all } i = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Let be $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$, a permutation of the integers$\}$ $1, 2, ..., n\}$. Using (3), we can write succesively:

$$x^1 = x \setminus \bar{x}_{i_1} \in \mathcal{S}$$

$$x^2 = x^1 | \bar{x}_{i_2} = x \setminus \bar{x}_{i_1} | \bar{x}_{i_2} \in \mathcal{S}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{n-1} = x^{n-2} | \bar{x}_{i_{n-1}} = \bar{x} \setminus x_{i_n} \in \mathcal{S}$$

But, i_n is arbitrary in $\{1, 2, ..., n\}$, and hence:

$$x \in T(\bar{x})$$

Let be, now, $\mathcal{R}$ the set of all strong equilibrium points of the game Γ.

Proposition 2. If $\mathcal{R}$ has more than two points, and if $x^*, y^* \in R$, then $x^* \setminus y_i^* \in \mathcal{R}$ for each $i = 1, 2, ..., n$.

We say (Nash [4]) that the set $\mathcal{R}$ of the S.E.P. is a strong solution for the game Γ.

Proposition 3. Every S.E.P. is G.E.P.

Proof: If x^* is a S.E.P., then $\mathcal{S} = T(x^*)$. Then, let us put

$$x = x^*/x_i \text{ in (2). It results:}$$

$$F_i(x^*) \geqslant F_i(x^*/x_i)$$

This inequality holds for every $x \in \mathcal{S}$ and for each i.

Hence, x^* is a G.E.P.

The converse of Proposition 3 is not true. This is showen by the following:

Example 1. Let be the matrix game, in which the payoff is:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

The plays $x^1 = (1,2)$ and $x^2 = (2,2)$ are both equilibrium points (G.E.P.) for the game. But only x^1 is a S.E.P. too.

Example 2. Let us get:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = [0, 1],$$

$$F_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_1 = x_2 = 1. \\ 1 - x_i & \text{otherwise} \end{cases}, \quad i = 1,2.$$

It is easy to see that the plays $x^1 = (0,0)$ and $x^2 = (1,1)$ ar equilibrium points (G.E.P.). Also, we can prove that x^1 is S.E.P. But x^2 is not a S.E.P.

Indeed, if $x_2 = 1$,

$$F_1(1, x_2) = 0 \leqslant 1 - x_1 = F_1(x_1, x_2)$$

§ 3. THE PROBABILITY OF THE EQUILIBRIUM POINT.

The problem of the existence of the equilibrium points in the noncooperative game theory, cannot be solved in a exhaustive way.

Certainly, condition has been formulated which assure the existence of the equilibrium points for certain classes of games. Such a result will be given in § 4.

Yet ,a precise delimitation of the whole set of all games that admit equilibrium points are missing.

A probabilistic answer was given, in this problem, only for the finite case.

Let be Γ a finite n-person game. For each $i = 1, 2, ..., n$ let m_i be the number of pure strategies in $\mathscr{X}_i$

Threexist, then, $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$ distinct plays in $\mathscr{X}$.

We shall name the game Γ „random", meaning by this term the following properties:

(*a*) For each $i = 1, 2, ..., n$ the values $F_i(x)$, $(x \in \mathscr{X})$ of the payoff functions F_i are assumed to be the distinct values of some identical continuous distributed random variables $\mathscr{F}_i^x$.

(*b*) The random variables $\mathscr{F}_i^x$ are independent.

Using these assumtion M. Dresher proved in [1] that the probability that the game Γ should have a pure equilibrium point, (G.E.P.) is given by the expression:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_n) = \sum_{S=1}^{M} (-1)^{s+1} C_{M_i}^s M^{-s} \mu(s)$$

where:

$$M_i = \prod_{j \neq i} m_j$$

and, for each $s = 1, 2, ..., M$

$$C_{m_i}^s s! \leqslant \mu(s) \leqslant m_i^s$$

Moreover, if the number of the pure strategies of two players, at least, is infinitely increased, then the limit value of the mentioned probability is $1 - 1/e$.

It is interesting to notice that for the particular case formed by the matrix games, this probability converges to o ([3])

A simple way of reasoning may lead to find out the probability that a finite game admits a strong equilibrium point, at least.

We can immediately the following:

Proposition 4. A random game cannot has than one S.E.P.

Proof: Let us presume that x^* and y^* are two distinct strong equilibrium points.

Then, there is i so that $x_i^* \neq y_i^*$

Since x^* is S.E.P.

$$F_i(y^*/x_i^*) \geqslant F_i(y^*)$$

But, y^* is at the same time a G.E.P., and:

$$F_i(y^*) \geqslant F_i(y^*/x_i^*)$$

Hence,

$$F_i(y^*/x_i^*) = F_i(y^*)$$

This is in contradiction with the assumption (*a*), and then the statement of proposition is proved.

Now, for *a* $x \in \mathscr{X}$ let be $P(x)$ denote the probability that x should be a S.E.P.

Then, taking into account by the Proposition 4, the probability that the game should admit a pure S.E.P. has the expression:

$$P'_n\,(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} P(x) \tag{4}$$

We can write:

$$P(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{F_i(y/x_i) \geqslant F_i(y), \text{ for every } y \in \mathscr{X}\}\right) = \tag{5}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(F_i(y/x_i) \geqslant F_i(y), \text{ for every } y \in \mathscr{X})$$

A simple computation leads to the conclusion that every term of the product from (5) is equal with $1 \backslash m_i^{M_i}$

Hence, from (4) and (5) it follows:

$$P(m'_n, m_2, \ldots, m_n) = \frac{M}{m_1^{M_1} m_2^{M_2} \cdot m_n^{M_n}} = \frac{1}{m_2^{M_1-1} \cdot m_2^{M_2-1} \ldots m_n^{M_n-1}} \tag{6}$$

We can conclude the following:

Theorem 1. (i) A finite random game admits a pure S.E.P. with a probability equal with:

$$P'_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} m_i^{M_i-1}}$$

(ii) If, there is a j so that $m_j \to \infty$ and presuming that not all $m_i, (i \neq j)$ are equal with 1, then:

$$\lim_{m_i \to \infty} P'_n(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) = 0.$$

§ 4. EXISTENCE THEOREMS FOR STRONG EQUILIBRIUM POINTS.

Taking into account the very restrictive character of the definition 3 we may presume that a S.E.P. does not allways appear in every situation in which a G.E.P. exists.

A characteristic example is constituted by the class of finite games. It is well konwn (Nash[4]) that every finite game has a mixed equilibrium point (G.E.P.) at least.

Or, it is easy to observe that not all finite game has a mixed S.E.P. too.

Example 3. For a two-person game let us suppose that the payoff of the first player is given by the matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A pair of mixed strategies has the form (s_1, s_2) whith $s_1 = (p_1, p_2, p_3)$, $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, respectively, $s_2 = (q_1, q_2)$, $q_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{2} q_j = 1$.

A mixed S.E.P. (s_1^*, s_2^*) must satisfy the followings inequalities:

$$F_1(s_1^*, s_2) \geqslant F_1(s_1, s_2), \text{ for all } (s_1, s_2),$$

or, equivalently:

$$F_1(s_1^*, s_2) \geqslant F_1(x_1, x_2), \text{ for } x_1 = 1, 2, 3. \text{ and } x_2 = 1, 2.$$

This leads us to the system:

$$5p_1^* + 2p_2^* - p_3^* \geqslant \begin{cases} 5 \\ 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$-p_1^* + 3p_2^* + 4p_3^* \geqslant \begin{cases} -1 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1$$

$$p_1^* \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3$$

Or, this is equivalent with:

$$6p_1^* + 3p_2^* \geqslant 6$$

$$-5p_1^* - p_2^* \geqslant 0$$

$$p_i^* \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3$$

But, this is impossible.

In the followings we shall formulate certain condition which assure the existence of a S.E.P. for infinite games.

In the $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ case, J. Pontstein ([5]) has estabilished a result attesting the existence of a L.E.P. based on the Kakutani's fixed point theorem.

We shall require, in the following theorema, some conditions which do not involve the usual convex propertiexs.

For a fixed X_i in $\prod_{j \neq i} \mathcal{X}_j$, let be:

$$U(X_i) = \{x_i \in \mathcal{X}_i \mid x = (X_i;\ x_i) \in \mathcal{S}\}$$

Theorem 2. Let be the noncooperative game Γ which satisfies the followings conditions:

(i) The set $\mathcal{S}$ of the plays is compact.

(ii) $\bigcap_{x \in \mathcal{S}} T(x) \neq \emptyset$

(iii) For each $i = 1, 2, \ldots, n, F_i(X_i; .)$ is upper semicontinuous on $U(X_i)$ for every fixed X_i

(iv) For each finite subset $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ there is a $\bar{x} \in T(x)$ so that for every $i = 1, 2, \ldots, n$, and every $x \in \mathcal{S}'$

$$F_i(x/\bar{x}) \geqslant F_i(x).$$

Then:

(a) The game Γ admits a S.E.P. at least.

(b) If in addition $\mathcal{S}$ is convex and for each $i = 1, 2, \ldots, n, F_i(X_i; ,)$ is quasi-concave for each fixed X_i, then the set $\mathcal{R}$ of all S.E.P. is convex closed, and has the interchangeability property.

Proof: (a) For each $x \in \mathcal{S}$, let be:

$$\mathcal{C}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} \{\bar{x} \in T(x) \mid F_i(x/\bar{x}_i \geqslant F_i(x)\}$$

Of course, $\mathcal{C}(x)$ is a nonvoid, closed subset of $\mathcal{S}$.

According to (iv), if $\mathcal{S}'$ is finite

$$\bigcap_{x \in \mathcal{S}'} \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$$

But, since $\mathcal{S}'$ is arbitrary and $\mathcal{S}$ is compact,

$$\bigcap_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{C}(x) \neq \emptyset \tag{7}$$

The last relation says that there exists $x^* \in \bigcap_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{C}(x)$

Then:

$$F_i(x/x_i^*) \geqslant F_i(x)$$

for every $i = 1, 2, ..., n$, and $x \in \mathcal{S}$

(b) Owing to the hypothesis (iii), $\mathcal{R}$ is closed.

It is easy to notice that since $\mathcal{S}$ is convex, then $T(x)$ is a nonvoid, convex subset of $\mathcal{S}$ for every x

Then let x^* and y^* be two S.E.P. and $\lambda \in [0,1]$. We have $\lambda x^* + (1-\lambda) y \in \bigcap_{x \in \mathcal{S}} T(x)$

The quasi-concavity of the function F_i allows us to assert that:

$$\Phi(x) = \{\bar{x}_i | F_i(x/\bar{x}_i) \geqslant F_i(x)\}$$

is a convexe subset of $\mathcal{X}_i$ for each fixed $x \in \mathcal{S}$

Then, if $x_i^*, y_i^* \in \Phi(x)$, it follows:

$$\lambda x_i^* + (1-\lambda) y_i^* \in \Phi(x)$$

And, then:

$$F_i(x/\lambda x_i^* + (1-\lambda) y_i^*) \geqslant F_i(x)$$

for every $x \in \mathcal{S}$ and $i = 1, 2, ..., n$.

The last statement of the theorem follows from Proposition 2.

Remark We notice that (iv) is a necessary condition for the existence of a S.E.P.

In the $\mathcal{S} = \mathcal{X}$ case, the condition (ii) of the previous theorem is trivially satisfied.

Then, as a special form of the theorem 2 we can formulate the following:

Theorem 3. If the game Γ defined on $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$, satisfies the properties:

(j) For each $i = 1, 2, ..., n$, $\mathcal{X}_i$ is a compact set.

(jj) $F_i(X_i; .)$ is an upper semi-continuou sfunction for every fixed X_i.

(jjj) for every finite subset $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ there is $\bar{x} \in \mathcal{X}$ so that, for every $i = 1, 2, ..., n$, and $x \in \mathcal{X}'$

$$F_i(x/\bar{x}_i) \geqslant F_i(x)$$

Then:

(a) The game has a S.E.P. at least.

(b) If in addition, for each i, $\mathcal{X}_i$ is convex and $F_i(X_i;.)$ is quasi-concave, then the set $\mathcal{R}$ is a closed, convex part of X.

Received on November 12, 1972.

Faculty of Mathematics and Mechanics.
University of Bucarest.

REFERENCES:

[1]. M. DRESHER — *Probability of a pure equilibrium point in a n—person game*— J. Comb. Theory 8(1970) p. 134—145.

[2] K. FAN — *Minimax theorems* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953) p. 42—47

[3] A.J. GOLDMAN — *The probability of a saddle point* — Amer. Math. Montly 64(1957) p. 729—730

[4] J.F. NASH — *Non — cooperative games* — Ann. Math. 54 (1954) N. 2

[5] J. PONTSTEIN — *Existence of equilibrium points in non-product spaces* — J. SIAM Appl. Math. 14 (1966) N. 1.

CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR CLASE DE OPERATORI LINIARI

NICOALE TIȚA

Scopul acestei note este de a prezenta unele aspecte legate de operatorii p-nucleari, p-absolut sumabili [3], [4] și a altor categorii care generalizează pe acestea.

Considerăm pentru început un spațiu Hilbert separabil H.

Sînt bine cunoscute clasele $\sigma_p(H)$ [5]. Precizăm totuși că operatorul $A: H \to H$ face parte din $\sigma_p(H)$, $p > 0$ dacă

$$\sum s_j^p(A) < \infty, \quad s_j(A) = \lambda_i(AA^*)^{\frac{1}{2}}$$

Prezentăm la lnceput un rezultat legat de produsul tensorial al operatorilor de clasă G_p.

Propoziție: Dacă $A_i \in \sigma_p (0 < p < \infty)$, $i = 1, 2$, atunci

$$A_1 \otimes A_2 \in \sigma_{\frac{p}{2}}(H \otimes H)$$

Demonstrație: Vom folosi faptul că $\lambda_j(A_1 \otimes A_2) = \lambda_j(A)_1 \cdot \lambda_j(A_2)$ [ ] Astfe se poate scrie :

$$s_j(A_1 \otimes A_2) = \lambda_j[(A_1 \otimes A_2)(A_1 \otimes A_2)^*]^{\frac{1}{2}} = \lambda_j[(A_1 \otimes A_2) \cdot (A_1^* \otimes A_1^*)]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lambda_j[(A_1 A_1^*)^{\frac{1}{2}} \otimes (A_2 A_2^*)^{\frac{1}{2}}] = s_j(A_1) \cdot s_j(A_2)$$

(pentru justificarea calculelor efectuate aici se poate vedea [1], [6]).

Din această reprezentare rezultă:

$$(\sum s_j^{\frac{p}{2}}(A_1 \otimes A_2))^{\frac{2}{p}} \leqslant (\sum s_j(A_1) \cdot s_j(A_2))^{\frac{p}{2})\frac{2}{2}} \leqslant (\sum s_j^p(A_1))^{\frac{1}{p}} (\sum s_j^p(A_2))^{\frac{1}{p}}$$

adică tocmai rezultatul dorit[1].

---

[1] Acest rezultat a fost comunicat în 1970 la sesiunea șt. a Institutului Politehnic Brașov.

Din această propoziţie se obţine ca o consecinţă faptul că:
Oricare ar fi norma tensorială α, există relaţia:

$$\sigma_p(H) \otimes_\alpha \sigma_p(H) \subset \sigma_{\frac{p}{2}} (H \otimes H)^2)$$

Sîntem acum în măsură să dăm o caracterizare a operatorilor p-nucleari în cazul spaţiilor normate $\sigma_p(H)$.

Teoremă: Mulţimea operatorilor p-nucleari din $\sigma_s^*(H)^{2'})$ *îşi* $\sigma_q(\mathrm{H})$ *este inclusă în mulţimea operatorilor de clasă* $\sigma_r(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \left(\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\mathrm{q}}\right)$

Demonstraţie. Se ţine seama de faptul că mulţimea operatorilor p-nuclaeri din σ_s^* în σ_q este inclusă în $\sigma_s(H) \otimes_{g_p} \sigma_q(H)$, unde g_p este norma tensorială introdusă de P. Saphar [4].

Ţinînd cont de o observaţie făcută anterior rezultă că:

$$\sigma_s(H) \otimes_{g_p} \sigma_q(H) \subset \sigma_r(H \otimes_{g_p} H)$$

Cum însă norma g defineşte aceiaşi topologie ca şi norma clasică a produsului tensorial de spaţii Hilbert [4], rezultă că:

$$\sigma_s \otimes_{g_p} \sigma_q \subset \sigma_r(H \otimes H)$$

Ţinînd cont de relaţia de dualitate ce există între operatorii p-nucleari şi cei p-absolut sumabili [3], [4], rezultă că un rezultat analog celui de mai sus se obţine şi pentru operatorii p-absolut sumabili.

Facem în continuare nuele observaţii asupra normelor tensoriale g_k şi d_k[4].

Astfel, folosind funcţiile simetrice de normare Φ[5], care generalizează funcţiile $\Phi_p(\xi) = (\sum | \xi_j |^p)^{\frac{1}{p}}$, ce intervin în definirea lui j_k şi d_k, se pot introduce, prin analogie, normele g_Φ şi d_Φ care în particular ne conduc la g_k şi d_k.

În acest mod se pot introduce operatorii „Φ-nuclearly şi Φ-absolut sumabili"[3]; care extind conceptul de operatori p-nucleari şi p-absolut sumabili.

Între aceste clase de operatori se pot stabili relaţii analoage cu cele stabilite în [4] între operatorii p-nucleari şi p-absolut sumabili.

BIBLIOGRAFIE

1. J. DIXMIER: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien.* Paris, 1957.
2. A. BROWN, C. PEARCY: *On a specra of tensor product of operators.* Proc. Amer. Math. Soc. 1966.
3. A. PERSSON A. PIETSCHE: *p-nuclear und p-integral Abilldungen in Banachraumen.* Studia Math. 33 (1969) pag. 19—62.

---

[2] Norma α trebuie să fie diferit de cele ce definesc produsele tensoriale proectiv şi inductiv.

[2'] s^* este conjugatul lui $s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1\right)$

[3] Ideia introducerii acestor clase a fost comunicată în 1971 la sesiunea Institutului Mine Petroşani.

4. P. SAPHAR: *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires.* Studia Math. 38(1970) pag. 71.
5. R. SCHATTEN: *Normideal of completely continous operators.* 1960.
6. N. TIŢA: *Consideraţii asupra produselor tensoriale de operatori.* Buletinul Universităţii din Braşov. (va apare).

Primită la 10 noiembrie 1972 Institutul Politehnic Braşov.

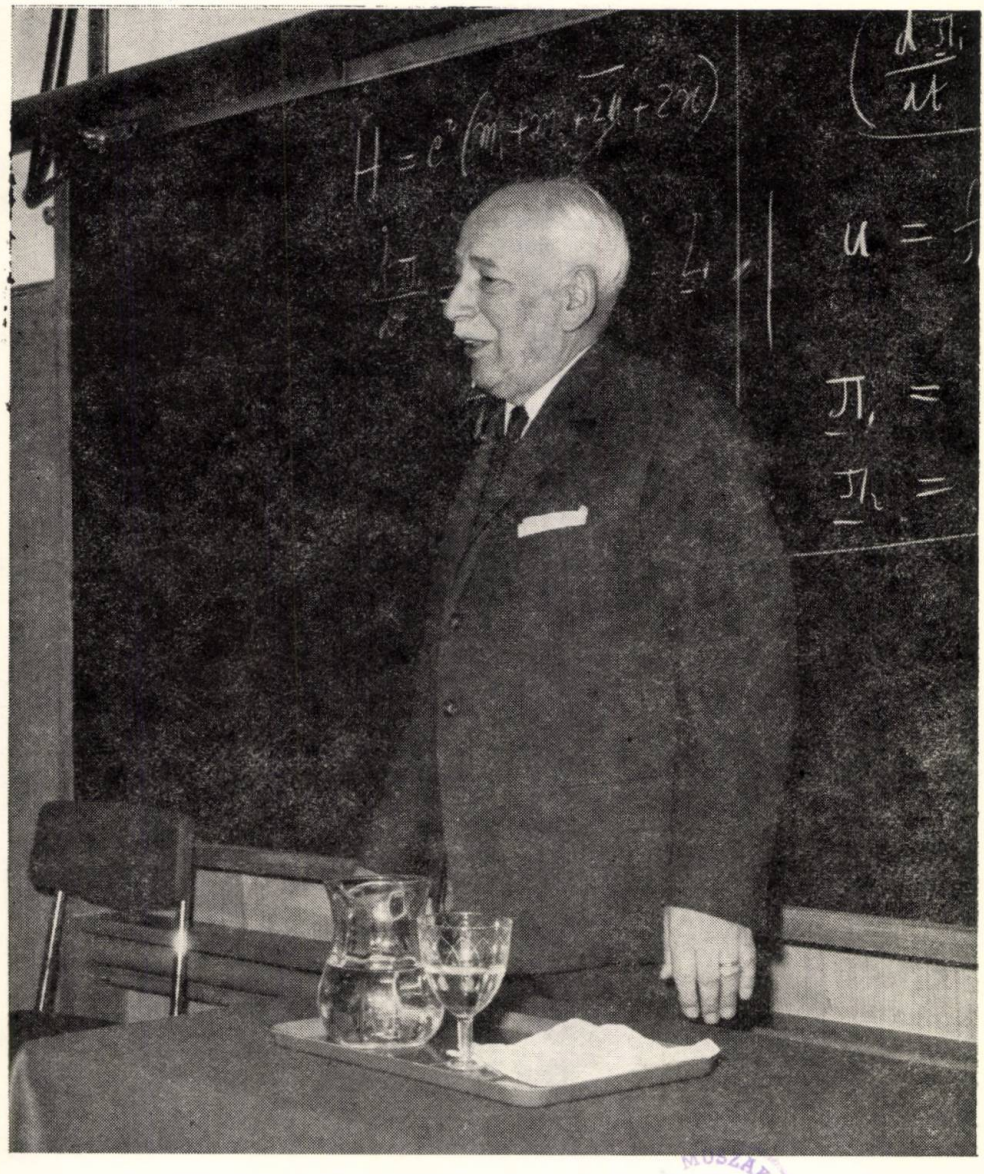
CONSIDÉRATIONS SUR DES CLASSES D'OPERATEURS LINEAIRES

RÉSUMÉ

En tenant compte que, pour l'espace de Hilbert H, $A_1 \otimes A_2 \in \sigma_{\frac{p}{2}}$ şi $A_1, A_2 \in \sigma_p (A \in \sigma_p$ si $\Sigma s_j^p(A) < \infty)$, on montre que l'ensemble des opérateurs p-nucleaires de σ_s^* dans $\sigma_q \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\right)$ appartient à la classe $\sigma_r\ (H \otimes H)$. Autres propriétés sont donées.

VIAȚA FACULTĂȚII

SĂRBĂTORIREA ACADEMICIANULUI OCTAV ONICESCU



În ziua de *14* septembrie *1972*, a avut loc, în amfiteatrul „Spiru Haret" al Facultăţii de Matematică—Mecanică, sărbătorirea acad. prof. Octav Onicescu, cu prilejul împlinirii vîrstei de *80* de ani.

Au ţinut să ia parte la omagierea eminentului om de ştiinţă român academicieni, membri corespondenţi, cercetători din unităţile Academiei R.S. România şi Academiei de Ştiinţe Sociale şi Politice, profesori şi studenţi ai Universităţii Bucureşti, prieteni apropiaţi.

Prezidiul şedinţei a fost alcătuit din prof. I. Bucur, decanul Facultăţii de Matematică-Mecanică, prof. G. Ciucu, rectorul Universităţii Bucureşti, prof. Gh. Galbură, acad. C. Iacob, acad. Gh. Mihoc, acad. S. Ţiţeica, vicepreşedinte al Academiei R.S. România.

Au fost rostite cuvîntări ce au pus în evidenţă contribuţiile academicianului Onicescu în diferite domenii ale matematicii, activitatea sa ca profesor, şef de şcoală, creeator de instituţii, generator al atîtor iniţiative remarcabile etc.

Tuturor le-a răspuns acad. O. Onicescu.

Prezentăm în paginile următoare cuvintele de omagiu şi răspunsul sărbătoritului.

CUVÎNTUL DE DESCHIDERE ROSTIT DE

Prof. I. BUCUR
Decanul Facultăţii de Matematică-Mecanică

Stimaţi tovarăşi,

Facultatea noastră, profesorii şi studenţii, îşi îndeplinesc azi cu plăcere îndatorirea lor de a sărbători pe profesorul O. Onicescu pentru cea de a 80-a sa aniversare.

Ne exprimăm, dragi tovarăşi, cu această ocazie sentimentele noastre de admiraţie şi de profundă recunoştinţă pentru excepţionala activitate pe care profesorul Onicescu a desfăşurat-o şi continuă să o desfăşoare, neobosit, de mai bine de patru decenii în cadrul facultăţii noastre.

Este impresionant de remarcat că influenţa complexei sale personalităţi se manifestă cu rezultate fructuoase în aproape toate domeniile fundamentale ale matematicii moderne: Algebră, Analiză, Geometrie şi Topologie, Teoria funcţiilor reale şi complexe, Analiză funcţională, Calculul probabilităţilor şi Statistică matematică, Logică matematică, Mecanică, Teoria relativităţii, Mecanică statistică, Istoria matematicii, Teoria programării, Teoria învăţării, etc. Această personalitate pune în evidenţă în modul cel mai clar în primul rînd dubla sa vocaţie: aceea de pasionat cercetător, concretizată în savantul de astăzi de reputaţie mondială, şi aceea de pedagog, de îndrumător al tinerei generaţii de matematicieni. Lucrările sale sînt adevărate filoane de idei preţioase, fecunde, constituind prin aceasta o atracţie deosebită pentru tinerii matematicieni.

Am convingerea că unul din secretele viabilităţii operei matematice a profesorului Onicescu constă în arta sa de alegere a subiectelor de cercetat. Aceste subiecte au constituit întotdeauna puncte dominante, strategice în matematica contemporană.

Profesorul Onicescu a reuşit să formeze în jurul său un număr atît de mare de elevi, în ţara noastră cît şi peste hotare, dintre care un număr mare de specialişti de competenţă notorie în cele mai diverse domenii ştiinţifice, datorită autenticităţii lucrărilor sale, bogăţiei de idei originale, îndrăsneţe, fineţei technicilor folosite precum şi prin preocuparea sa continuă de modernizare şi perfecţionare a învăţămîntului nostru matematic.

Mă voi mărgini să reamintesc în acest ultim sens că încă din anul 1938 în calitate de profesor la catedra de Algebră Dsa. a reorganizat această catedră aşezînd învăţămîntul algebrei pe bazele sale moderne şi a publicat în acelaşi timp, împreună cu apropiatul său colaborator Gh. Galbură, cea

dintîi carte de algebră modernă în limba română, lucrare folosită şi azi cu folos de studenţii noştri.

Puţin mai tîrziu profesorul Onicescu organizează în spiritul matematicii moderne învăţămîntul calculului probabilităţilor, fapt ce a contribuit în mod esenţial la creierea şcolii noastre naţionale de teoria probabilităţilor şi statistică matematică, şcoală care face azi cinste învăţămîntului nostru matematic.

Alături de cursurile sale magistrale Dsa. a condus seminarii ştiinţifice pe cele mai variate teme: teoria funcţiilor sumă, grupuri şi algebre Lie, teoria distribuţiilor, topologie şi geometrie algebrică, calculul probabilităţilor, mecanică statistică, etc.

Profesorul Onicescu constituie pentru noi un exemplu de modul unitar de a concepe matematica, un model de înţelegere al condiţionării reciproce dintre ramurile cu caracter fundamental al cercetării matematice şi cele cu caracter aplicativ. Măiestria şi uşurinţa de a transfera idei şi metode, evident convenabil modificate, între domenii matematice în aparenţă îndepărtate par să constituie deasemeni o caracteristică a stilului său de cercetare.

Evident, este greu fie chiar să rezumăm aspectele atît de numeroase ale activităţii pe care profesorul Onicescu a desfăşurat-o şi o desfăşoară în mijlocul nostru.

În lucrările de cuvînt care vor urma se va insista asupra unora dintre ele.

Toate aceste aspecte poartă marca unui om de ştiinţă, unui profesor de o deosebită anvergură.

Noi, cadrele didactice şi studenţii facultăţii de matematică-mecanică, profităm de această fericită împrejurare pentru a adresa profesorului Onicescu, maestrului nostru, urările noastre de sănătate, fericire şi noi succese pentru continua înflorire a învăţămîntului matematic în ţara noastră.

CUVÎNTUL Prof. G. CIUCU

Rectorul Universităţii Bucureşti

Avem bucuria să sărbătorim astăzi cei 80 de ani de viaţă ai profesorului şi academicianului Octav Onicescu. Universitatea din Bucureşti consideră un eveniment important că poate omagia astăzi nu numai remarcabilul om de ştiinţă Octav Onicescu, ci şi profesorul Onicescu, pe savantul de prestigiu care a ilustrat şi ilustrează această Universitate prin activitatea sa, contribuind la afirmarea şcolii româneşti pe plan mondial.

Numele lui Octav Onicescu este cunoscut în cercuri ştiinţifice largi din ţară şi străinătate, deoarece de D-sa este legată dezvoltarea teoriei probabilităţilor cu idei, cu rezultate remarcabile şi cu noţiuni noi. A obţinut rezultate fundamentale în numeroase alte domenii ale matematicii dintre care menţionăm fizica statistică, mecanica, algebra, analiza, teoria informaţiei şi statistica matematică.

Aspectul fundamental al activității prof. O.Onicescu este acela de creator de școală. Creator de școală în dublu sens, dacă mă refer la crearea acelei importante Școli de statistică, actuariat și calcul, și la crearea școlii românești de teoria probabilităților. Centrul de statistică matematică al Academiei RSR — această școală de teoria probabilităților — este un organism robust, în plină dezvoltare, care și-a îndreptat ochii și activitatea și către diferite domenii aplicative. El este robust pentru că așa l-a format profesorul Onicescu, șef de școală în înțelesul cel mai complet al cuvîntului.

Este greu de spus ce a dat Universității în general și Facultății de matematică în special, acela care primește astăzi respectuosul și caldul nostru omagiu. Se va vorbi aici, acum, desigur, despre contribuția sa la modernizarea învățămîntului matematic, la fondarea învățămîntului teoriei probabilităților și statisticii matematice. Nu se vor uita cred, nici inițiativele atîtor seminarii de largi orizonturi, fără a mai pomeni de permanenta menținere în actualitate, de adevărata vocație de a fi propagatorul celor mai noi idei și teorii — și asta nu numai în cadrul disciplinelor matematice.

Profesorul O. Onicescu este autorul unor excelente tratate, monografii și manuale, unele fiind traduse în străinătate. Caracteristicile principale ale publicațiilor sale sînt claritatea formulării problemei, expunerea riguros științifică și mai ales bogăția de idei și rezultate originale.

Academicianul O. Onicescu a ținut numeroase cursuri de bază sau de specialitate care s-au distins, în afara înaltelor lor calități științifice prin eleganța excepțională a expunerii, prin faptul că fiind în permanență la curent cu cele mai noi rezultate în diversele domenii ale matematicii, profesorul nostru realiza adevărate sinteze și semăna idei noi pentru cercetare. Seminariile de la Catedra de teoria probabilităților conduse de D-sa reprezentau adevărate dezbateri asupra celor mai actuale domenii de cercetare și, în urma observațiilor pe care le făcea, mulți participanți plecau cu noi idei, finalizate apoi în note și studii de cercetare.

Preocupat în permanență de problemele moderne ale matematicii, Acad. O. Onicescu a grupat în jurul său cercetători din diverse domenii de activitate, ideile și sugestiile sale constituind punctul de plecare al unor cercetări importate. Astfel, mulți fizicieni, logicieni, pedagogi, psihologi, ingineri sau medici au fost îndrumați în lucrările lor de profesorul O. Onicescu, fără a mai menționa pe atîția cercetători din diverse domenii ale matematicii.

Dealtfel, discuțiile cu profesorul O. Onicescu, fie matematice, fie asupra altor probleme, sînt caracterizate prin observații și idei care pot orienta activitatea. Toate acestea caracterizează pe omul de știință și de mare cultură, Prof. Octav Onicescu.

Profesorul Octav Onicescu reprezintă pentru noi imaginea universitarului legat de catedră, de școală ca instituție, legat de colegi și discipoli — dar mai ales imaginea învățatului dornic să comunice, să dăruiască cu pasiune, cu afecțiune părintească. Prof. Onicescu este în permanent contact cu tinerele generații de matematicieni, respectîndu-le caracteristicile și ajutîndu-i să se descopere pe ei înșiși.

Mulți matematicieni din țara noastră sînt mîndri că pot afirma că sînt elevii profesorului Onicescu și că în munca lor de fiecare zi folosesc lucrările și principiile sale științifice sau pedagogice.

În numele acestora și al Biroului Senatului Universității, îi urăm profesorului nostru multă sănătate și putere de muncă pusă în slujba dezvoltări matematicii din țara noastră.

CUVÎNTUL Acad. Prof. GH. MIHOC

Directorul Centrului de Statistică matematică al Academiei R.S.R.

Stimați tovarăși,

La sărbătorirea sa, cu ocazia împlinirii vîrstei de 75 de ani, acad. Octav Onicescu făcea următoarea mărturisire: „Am cultivat probabilitatea ca știință a măsurii evenimentelor și proceselor aleatoare".

Nu-mi rămîne, în această alocuțiune, decît să ilustrez prin cîteva exemple precizia și profunzimea acestei caracterizări proprii, atît de lapidare, asupra activității de probabilist a sărbătoritului nostru de astăzi. Prof. Onicescu a parcurs distanța dintre 75 și 80 ani cu o uimitoare putere creatoare, dăruindu-ne noi volume și, mai ales, noi teorii care se sprijină și se completează una pe cealaltă.

Înainte însă de a începe o schiță (incompletă) a problemelor abordate de D-sa în domeniul teoriei probabilităților și statisticii matematice, sîntem datori să facem o observație esențială, și anume că în întreaga sa activitate științifică, prof. Onicescu a pornit de la condițiile și de la datele experienței. În introducerea la cartea sa „Principiile teoriei probabilităților" (1969), prof. Onicescu scria următoarele: „Teoria probabilităților este o știință a naturii, la fel cu mecanica. Amîndouă sînt științe matematizate întrucît ele urmăresc imediata construcție de modele matematice care să reprezinte obiectele respective... Pentru teoria probabilităților, obiectul central este un sistem de elemente care fac obiectul unui fenomen natural, a unei experiențe elaborate sau a unei succesiuni temporale de fenomene naturale sau de experiențe, deci ale unor procese, în care realitările nu sînt previzibile, ci se reprezintă matematic ca evenimente aleatoare cărora li se pot atribui probabilități ... Fiecare tip de experiență ne dă un sistem de probabilități ... Dar probabilitatea însăși, pentru tipurile de evenimente concrete ale experiențelor, are o semnificație care variază cu experiența". Aceste idei au fost reluate și în cealaltă lucrare esențială „Principes de logique et de philosophie mathematique" (1971).

De pe cealaltă poziție fundamentală trebuie înțeleasă, cred eu, întreaga creație științifică matematică a prof. Onicescu.

Se știe că, în teoria probabilităților, reprezentarea ansamblistă a cîmpului de evenimente a fost supusă, nu o dată, criticilor. A. N. Kolmogorov însuși a remarcat incongiruitatea evenimentelor elementare ca evenimente cu probabilitatea nulă, considerate ca elemente din care se construiesc eve-

nimentele cu probabilitate pozitivă. Prof. Onicescu a subliniat în mod deosebit că reprezentarea cîmpului de evenimente ca un cîmp borelian de părți ale unei mulțimi are defectul că punctele (elementele) mulțimii nu au, în general, semnificație fenomonologică. Încercarea de a elimina pe Ω lasă fără suport celălalt element al teoriei, variabila aleatoare. Pentru remedierea acestei situații, prof. Onicescu a introdus în literatura de specialitate *funcțiile de eveniment* sau *funcțiile sumă*: în locul modelului clasic $\{\Omega, \mathcal{K}, \mathcal{P}\}$ este propus un model nemijlocit indicat de natura lucrurilor, $\{\mathcal{K}, \mathcal{P}\}$ unde $\mathcal{K}$ este un sistem de evenimente ω și P o probabilitate definită pentru orice $\omega \in \mathcal{K}$.

Pentru a sublinia încă odată legătura cu experiența, voi menționa că în lucrarea sa „Numere și sisteme aleatoare" (1962), prof. Onicescu arată că atunci cînd se renunță la punctele și traiectoriile aleatoare considerate individual, studiul mișcării browniene poate căpăta un aspect mai global și mai direct legat de experiență. Aceasta ne oferă, de obicei, nu puncte individuale ci „puncte medii" reprezentînd mici domenii, și, de asemenea, nu traiectorii individuale ci fascicole de traiectorii unde neregularitățile sau discontinuitățile eventuale ale unor traiectorii particulare se șterg. Pentru o astfel de interpretare, utilizarea sumelor aleatoare, a funcțiilor sumă, în locul variabilelor aleatoare, este mai potrivită. S-a arătat, de asemenea, că descrierea unor procese ca martingalele, cu ajutorul funcțiilor sumă, este simplă.

Este bine cunoscut că teoria funcțiilor sumă a fost studiată și adîncită și de alți matematicieni români: Gh. Marinescu a dat noțiunea de spațiu L^p a funcțiilor sumă: R. Cristescu, care a prezentat spațiul funcțiilor sumă ca un spațiu ordonat; G. Sâmboan care a extins teoria la funcții sumă cu valori într-un spațiu local convex; I. Cuculescu, care a studiat supermartingalele cu ajutorul funcțiilor sumă. Au fost, de asemenea, definite noțiunile înrudite de vector-sumă și repartiție-sumă. Rezultatele de seamă în acest domeniu au fost prezentate unitar în volumul „Principiile teoriei probabilităților" pentru a nu mai adăuga lucrarea „Funzioni somma e loro applicazioni alla teoria dei proccessi stochastici" apărută la Rendiconti di matematica, în 1967) și seminarul „Funcții sumă", tipărit în 1963.

Voi trece acum la o altă cercetare izvorîtă din datele experienței. Studiind sistemele de evenimente cu structură de ordine, prof. Onicescu remarca faptul că „experiența nu oferă sisteme complete de evenimente ordonate sau dirijate la dreapta sau la stînga". Aceasta a fost sugestia pentru construirea unei teorii pre-probabiliste pentru un sistem de evenimente ordonate care nu constituie un cîmp. În acest caz, mărimile asociate evenimentelor nu pot fi aditive ci sub-aditive; măsura introdusă nu va mai fi o probabilitate ci pondere. Vom avea deci *mulțimi ponderabile* și *sisteme ponderate* de evenimente

Deosebirea dintre pondere și probabilitate este uneori dificilă; în unele cazuri ponderile pot fi „mai aproape de ceeace înțelegem în mod intuitiv prin probabilitate ... Foarte adesea ponderea e mai aproape de experiență și o urmărește mai bine în numeroasele sale variații". Mai mult încă, atribuirea de ponderi într-un proces empiric se oprește cînd experiența se epuizează: elementele care se mai produc, eventual, după un anume eveniment (semnificativ), nu mai aduc nimic nou.

Studiind problema numerelor aleatoare, prof. Onicescu a reluat critic şi creator o idee a lui R. von Mises. După cum se ştie, în teoria axiomatică a lui von Mises, sprijinită pe conceptul de colectiv statistic, instrumentul principal de lucru este numărul aleator. Desigur, conceptul de număr aleator nu are sens în afara experienţei. Prof. Onicescu socoteşte că teoria lui von Mises despre colectiv trebuie gîndită „nu atît ca o teorie asupra probabilităţilor, dar ca un element de bază al statisticii teoretice ... Colectivele pun doar în relief circumstanţele în cadrul cărora trebuie folosite probabilităţile, în care, deci, se relevă acele structuri caracteristice cărora le convine conceptul de probabilitate". Un întreg capitol din volumul „Principes de logique et de philosophie mathematique" este încinat conceptului de colectiv.

Conexiunea cu teoria informaţiei s-a făcut, în lucrările prof. Onicescu, pornind de la aceste idei fundamentale. Şirurile de numere aleatoare asociate unei experienţe, sînt esenţialmente neregulate. Apare astfel o structură neregulată care este, de fapt, o dublă structură: ca macrostructură, ea este în general uniformă, ca microstructură, este neregulată. Caracterizarea distanţei şi influenţei dintre cele două structuri poate fi realizată în parte utilizînd conceptele de informaţie şi entropie. Cred că pe această cale putem pătrunde mai bine sensul ceonceptului de *energie informaţională*, creat de prof. O. Onicescu în 1966 şi pe care cercetătorii români şi străini l-au folosit în lucrări ulterioare. Citez, printre alţii, pe Solomon Marcus, M.C. Demetrescu, P. Sterian, I. Negură. Energia informaţională constituie un indicator foarte sensibil al structurii statistice a unei populaţii, mai ales atunci cînd se urmăreşte variaţia acestei energii de la o populaţie la alta sau în cursul evoluţiei în timp a aceleiaşi populaţii.

De aici pînă la principiile unei *statistici informaţionale* trecerea a fost firească. Astfel, cea mai recentă lucrare a prof. Onicescu este construirea unei statistici fără mărimi, numai cu probabilităţi sau frecvenţe, folosind ca instrument de lucru coeficientul de corelaţie, cu un derivat, coeficientul de corelaţie informaţională.

Am lăsat la urmă, cu bună ştiinţă, crearea teoriei lanţurilor cu legături complete. Ea este rezultatul, fructul de preţ al gîndirii prof. Onicescu asupra aspectelor dinamice ale teoriei probabilităţilor. Problemele care s-au pus în jurul anilor 1930—1935, la care am avut cinstea să particip direct, au fost îndreptate spre analiza fenomenului de dependenţă statistică, către precizarea cadrului în care aceasta se leagă de ideea de *lanţ*, ca o lege naturală Lanţurile cu legături complete — care au dat naştere la noi şi în străinătate unei literaturi întinse — consideră tocmai aspectele generale ale dependenţei statistice, generalizînd dependenţa clasică markoviană. Rezultatele obţinute într-o serie de probleme importante ale analizei acestei clase noi de procese — ca problema ergodică şi problema legilor limită ,— generalizările şi aplicaţiile ulterioare, rezultate la care au contribuit trei generaţii de matematicieni români, permit să se vorbească astăzi de un capitol al teoriei proceselor stochastice, iniţiat în ţara noastră. Rezultatele cele mai importante se găsesc în două monografii: una apărută în ţară, la Ed. Academiei, scrisă de G. Ciucu şi R. Theodorescu, iar alta, în străinătate, de M. Iosifescu şi R. Theodorescu.

Ar trebui să mă mai refer aici și la volumul cel mai recent al profesorului Onicescu: „Mecanica statistică" (1971), volum scris împreună cu Silviu Guiașu. Așa cum arată autorii, mecanica statistică își propune să descopere mecanismul interior, microscopic, al proceselor ireversibile și să justifice evoluția în timp a valorilor funcțiilor termodinamice atașate acestor procese ireversibile. Modelul markovian este o primă etapă de cercetare, căci lanțul markovian este în general specific ireversibil, pe cînd reversibilitatea este proprietatea unor familii de lanțuri. Prin generalizare, s-a ajuns la ideia unei mecanici statistice a sistemelor cu legături *anholome*.

Am încercat în această schiță să dau o imagine a caracterului organic al creației prof. Onicescu în domeniul teoriei probabilităților. Rezultatele sale se integrează perfect într-o concepție generală proprie — ce mai poate fi împlinită și de acum înainte cu noi contribuții. Prof. Onicescu ne-a dăruit în ultimii cinci ani un întreg șir de lucrări originale; de la etapă la etapă, opera sa dă, din ce în ce mai mult, imaginea unei articulații complexe, omogene și armonice.

Ar fi incomplet ca atunci cînd vorbim despre opera prof. Onicescu să ne limităm numai la lucrările lui științifice. Profesorul Onicescu a fost un mare animator al vieții noastre matematice, contribuind prin generozitatea sa față de cei tineri și prin talentul său organizatoric la crearea unei școli importante din țara noastră: școala de teoria probabilităților, cu întinsele sale aplicații.

În anul 1925, prof. O. Onicescu a predat la Facultatea de Științe, secția Matematici, primul curs de teoria probabilităților din țara noastră. De atunci, teoria probabilităților a fost predată de D-sa fără încetare, reușind să formeze un număr însemnat de cercetări în acest domeniu. Dacă în București există un mare număr de persoane care lucrează în teoria probabilităților și aplicațiile sale, iar aceasta se datorește exclusiv profesorului Onicescu. Această sămînță care a dat rod trebuie să fie privită ca una din cele mai de seamă realizări a vieții sale, o realizare cu caracter național, cu care Universitatea noastră pe drept cuvînt se poate mîndri.

Recensămîntul populației din anul 1930 al cărei președinte a fost prof. O. Onicescu a avut de suferit din cauza lipsei de specialiști statisticieni. Pentru remedierea acestei stări de lucruri, D-sa a luat inițiativa inființării unei școli. Astfel a luat naștere, în anul 1931, „Școala de statistică", cea dintîi instituție de învățămînt superior de statistică din țara noastră. Cursurile acestei școli, care se țineau în localul Universității, durau doi ani. Studenții ei se recrutau dintre licențiații universitari de toate specialitățile: matematicieni, ingineri, medici, economiști, și alții — Existau la început două secții — una de statistică și alta de actuariat. În jurul profesorului Onicescu, care era directorul școlii, se adunaseră toți cei care se ocupau în acel timp cu statistica și aplicațiile ei. Printre ei, mulți tineri, cărora prof. Onicescu le-a încredințat cu generozitate și în același timp cu mult curaj, ținerea unor cursuri destul de dificile, care pînă atunci nu fuseseră predate în țara noastră ca, de exemplu, statistica matematică, matematici financiare, matematici actuariale. Mulți dintre acești profesori, care au pus o cărămidă la clădirea statisticii din țara noastră, astăzi nu mai sînt: Al. Pantazi, Șerban Gheorghiu, N. Ciorănescu,

I. Argeşeanu, M. Sanielevici, Mircea Vulcănescu, Dr. G. Banu. Alţi tineri din acea perioadă generoasă, Roman Moldovan, Paul Sterian, Ciril Petrescu, N. Georgescu-Roegen, Gh. Mihoc sînt astăzi înaintaţi în vîrstă, dar n-au îmbătrînit!

După cîţiva ani de funcţionare, Şcoala de statistică şi-a schimbat numele, devenind Institutul de statistică, actuariat şi calcul al Universităţii din Bucureşti. De notat că în jurul anului 1940, prof. O. Onicescu dădea o mare importanţă ştiinţei calculului.

Absolvenţii Institutului de statistică, actuariat şi calcul, răspîndiţi în întreaga ţară, au contribuit în mare măsură la ridicarea nivelului teoretic al statisticii folosite în instituţiile noastre. În domeniul asigurărilor nu existau, în ţara noastră, în acel timp, tehnicieni. Tarifele asigurărilor şi rezervele matematice erau calculate în străinătate din cauza lipsei de specialişti români. Institutul de statistică actuariat şi calcul a remediat această lipsă.

Prof. O. Onicescu a militat întotdeauna pentru ca teoriile pe care le-a expus de la catedră să pătrundă pe o scară cît mai întinsă în activitatea practică a societăţii. A participat la înfiinţarea „Asociaţiei pentru ştiinţa asigurărilor", al cărei preşedinte a fost, a înfiinţat „Corpul actuarilor" şi, din iniţiativa lui, au apărut reviste de statistică şi asigurări ca, de exemplu, „Anuarul pentru ştiinţa asigurărilor", „Buletinul asigurărilor sociale" şi altele. Întotdeauna a avut legături cu institutele oficiale din ţară. Săptămînal, de cîţiva ani, funcţionează la Direcţia Centrală de Statistică seminarul Onicescu, la care participă toţi iubitorii de statistică din Capitală, discutînd, sub conducerea veneratului şi experimentatului nostru dascăl, cele mai interesante aspecte ale vieţii moderne, sub prisma datelor statistice.

Viaţa profesorului Onicescu reprezintă o unitate: o unitate între teorie şi practică.

CUVÎNTUL Acad. Prof. CAIUS IACOB

În vasta operă ştiinţifică a academicianului profesor doctor docent Octav Onicescu, un loc deosebit de însemnat îl ocupă preocupările sale de mecanică.

Profesorul Octav Onicescu a predat cursurile de mecanică la Universitatea din Bucureşti, în perioada dintre cele două războaie mondiale, în cadrul secţiei de fizică, vechii Facultăţi de Ştiinţe.

În acea perioadă, acum îndepărtată, în care însăşi noţiunea de mecanician încă nu era complet degajată la noi, direcţia principală a cercetărilor sale ştiinţifice ne părea în special orientată spre alte domenii ale ştiinţelor matematice, ca teoria probabilităţilor, algebra, analiza funcţională, topologia şi teoria funcţiilor de variabilă complexă. Preocupările sale didactice ulterioare, de altfel, cu începere din anul 1939, în cadrul catedrelor de algebră şi de teoria probabilităţilor erau legate de aceste discipline.

Totuşi, interesul viu pe care l-a manifestat Octav Onicescu pentru mecanică, încă de la debutul său ştiinţific la Roma, cînd şi-a susţinut teza de doc-

torat sub conducerea marelui geometru și mecanician Tullio Levi-Cività și care s-a vădit inițial prin analiza operei lui Galileo Galilei (1923) și Newton (1936), ca și prin publicații privind în special aplicațiile analizei funcționale în mecanică, s-a menținut constant și l-a condus la îndelungate meditații asupra principiilor și problemelor mecanicii.

Așa se explică seria aproape neîntreruptă de memorii științifice pe care Octav Onicescu le-a dat la iveală cu începere din anul 1950 și care sînt în legătură cu fondarea unei noi mecanici.

Începînd cu memoriile sale asupra mișcărilor discontinue (1948) și a mișcării browniene (1950), asupra inducției mecanicii ondulatorii din cea corpusculară (1950), din care reiese intenția autorului de a clădi o mecanică generală care să se aplice atît în domeniul macroscopic cît și în cel microscopic, profesorul Octav Onicescu a urmărit cu pasiune și cu o perseverență impresionantă opera constructivă pe care și-a propus-o.

Memoriul său asupra unei mecanici noi a sistemelor materiale, publicat în anul 1954, este urmat de o serie de alte memorii în care sînt considerate problemele unei mecanici generale, principiile variaționale ale sistemelor continue, mecanica sistemelor inerțiale, mecanica solidului rigid, problema celor două corpuri sau a n corpuri, universul anti-minkowskian etc; ideile savantului profesor, care cumulează alese calități de matematician și de mecanician, adînc pătrunse de cîteva principii cu caracter general, de invarianță, s-au explicitat succesiv pentru a ajunge la importanta operă de sinteză din anul 1969; „Mecanica", din care reies cu desăvîrșită claritate concepțiile fundamentale care l-au inspirat și pe care a reușit să le expună în mod cu totul metodic.

În opera sa atît de originală Octav Onicescu subliniază deosebita importanță a principiilor clasice cumulate de marii mecanicieni din trecut: Newton, D'Alembert, Lagrange, Hamilton, dar caută să elibereze acest principii de restricțiile prea mari sub care sînt îndeobște prezentate, pentru a permite adoptarea lor și la cazul vitezelor sau a distanțelor foarte mari. El caută să deschidă pentru cititor largi perspective asupra mecanicii ținînd doar ceea ce este strict esențial în rezultatele de acum bine încetățenite ale mecanicii, pentru a permite generalizării ulterioare. Expunerea sa este axiomatică. Principiile fundamentale fiind date, urmează să se deducă din ele toate consecințele semnificative sau să se deducă extinderi depășind domeniul de aplicație obișnuit.

În expunerea profesorului Octav Onicescu, un loc important îl joacă noțiunea de lucru mecanic, principiul deplasărilor virtuale, analiza principiilor variaționale ca teorii unitare ale mecanicii.

Mecanica invariantivă a Prof. Octav Onicescu este o extindere a mecanicii lui Newton și ea este clădită pe noțiunile clasice de spațiu euclidian și de timp newtonian absolut. Unul din postulatele ei de bază este acela că funcția de stare a unui sistem de puncte materiale în mișcarea inerțială este un invariant euclidian al configurației formate de aceste puncte și de impulsurile lor, ceea ce justifică denumirea de „mecanică invariantivă" dată noii mecanici. Legea fundamentală a acestei mecanici afirmă că în cazul inerțial derivata exterioară a vectorului „impuls-funcție de stare" este nulă. Este cu totul remarcabil

că autorul deduce din această lege expresiile einsteiniene ale masei (ca funcţie de viteză) ale impulsului şi ale energiei.

Extinderea la sisteme de două puncte materiale a condus pe O. Onicescu la introducerea noţiunilor de „masă de interacţiune gravitaţională" şi de „masă de interacţiune Hubble", la deducerea legii lui Hubble care leagă viteza de recesiune de distanţa dintre particole, şi la punerea în evidenţă a faptului că gravitaţia şi dilataţia universului sînt efecte inerţiale ale materiei.

Mişcarea unui punct într-un cîmp de forţe este descrisă în noua mecanică prin egalarea derivatelor exterioare ale cvadrivectorului impuls-energie şi a cvadrivectorului potenţial.

Metodele introduse de acad. Octav Onicescu l-au condus să integreze în noua mecanică invariantivă teoria cîmpului electromagnetic, ceea ce este un fapt de o deosebită importanţă.

Lucrările de mecanică ale academicianului Octav Onicescu prin dezvoltările lor matematice moderne, prin reflexiile profunde pe care le cuprind, prin analizele critice ale principiilor mecanicii clasice, prin lărgirea cadrului acestor principii, incită la meditaţie şi repun în actualitate examenul critic al fundamentelor mecanicii, ştiinţă a naturii a cărei importanţă deosebită este foarte bine cunoscută în străinătate dar din nefericire mai puţin la noi, ştiinţă ale cărei baze păreau fixate în forme sublime şi imuabile.

În entuziasmul său tineresc pentru mecanică, ştiinţa căreia i-a consacrat principalele sale preocupări ştiinţifice din ultimii zece ani, academicianul Octav Onicescu s-a asociat cu alţi entuziaşti pentru cauza aceleiaşi ştiinţe, oameni de ştiinţă din alte ţări ca Luigi Sobrero, W. Olszak, Palacios, alcătuind un colectiv de mecanicieni care au fondat la Udine, în Italia, un Centru Internaţional de Ştiinţe Mecanice. Octav Onicescu este unul dintre cei trei rectori ai Centrului, încă de la înfiinţarea sa.

Noua instituţie, prin organizarea ciclurilor de conferinţe de mecanică cu începere din anul 1968, aduce o contribuţie deosebită la promovarea cercetărilor teoretice şi aplicate în cele mai noi discipline din cadrul ştiinţelor mecanice.

Reunind la Udine tineri mecanicieni din diverse ţări pentru audierea de cursuri ţinute de specialiştii cei mai reputaţi, se realizează o operă de o mare importanţă, menită să stimuleze şi mai mult cercetarea teoretică şi aplicată în mecanică şi să asigure o mai bună cunoaştere reciprocă dintre specialişti.

Deşi ţara noastră încă nu a aderat oficial la acest Centru internaţional, totuşi graţie stăruinţei academicianului Octav Onicescu, o serie de tineri mecanicieni români de la Facultăţile de Matematică-Mecanică din Bucureşti şi Iaşi sau de la Institutele de Matematică din Bucureşti şi Iaşi ale Academiei, au avut posibilitatea să asiste la aceste cursuri. Unii dintre aceştia au fost chiar invitaţi să ţină conferinţe de specialitate. Prin aceasta, acad. Octav Onicescu a adus o importantă contribuţie la impulsionarea cercetării teoretice în mecanică la noi în ţară, într-o perioadă în care, din neînţelegerea unor organe subalterne, se înregistra o recesiune a învăţămîntului superior al mecanicii în Universităţile noastre.

La a 80-a aniversare a academicianului Octav Onicescu, care-l găseşte în plină activitate creatoare. noi mecanicienii români, al căror interpret am

cinstea să fiu astăzi, îi aducem calde mulțumiri pentru tot ceea ce a făcut pentru cauza mecanicii în această țară și îi urăm din suflet mulți fericiți ani de sănătate, de muncă și de noi realizări.

Aceleași calde urări de sănătate și de depline satisfacții le adresăm și tovarășei sale de viață, Doamnei Luiza Onicescu, care i-a creat sărbătoritului nostru de astăzi condiții optime de muncă într-un cămin fericit și exemplar.

CUVÎNTUL Prof. GH. GALBURĂ

Facultatea de Matematică-Mecanică

Opera științifică și didactică despre care vorbim la a 80-a aniversare a Prof. Octav Onicescu, — operă vastă și, în multe privințe, cu implicații esențiale în evoluția matematicii românești, — este impresionantă, atît prin amploarea, cît și prin varietatea sa. Privim cu admirație și respect pe omul de știință și de mare cultură, cu înalte însușiri de dascăl, de maestru, care, asemenea înaintașilor săi, D. Emanuel și Tr. Lalescu a onorat Facultatea noastră cu lecții magistrale în mai multe discipline fundamentale, cu aceeași prospețime și profunzime, cu același elan științific creator și mobilizator.

Mulți dintre noi își amintesc de cursurile de probabilitățiale prof. O. Onicescu despre care ne-au vorbit tov. Prof. Gh. Mihoc și tov. Rector Gh. Ciucu, mulți dintre noi (în special cei de la Facultatea de Fizică și de la catedra de Mecanică) ne amintim de lecțiile sale de mecanică din amfiteatrul Negreanu (dintre anii 1930—1940) sau din alte săli ale Facultății.

Eu aș dori să mă refer aici doar la cursurile sale de algebră. Am avut privilegiul să asist pe prof. Octav Onicescu la acele cursuri, care aveau loc chiar în acest amfiteatru, între anii 1943—1949. În acele cursuri D-sa a adus un suflu nou, orientînd în spirit contemporan învățămîntul algebrei către studiul structurilor algebrice, încă din primii ani de studii în Facultate. Profesorul O. Onicescu prevestea astfel în expunerile sale factura tratatelor actuale de algebră, prezentînd structurile fundamentale ale algebrei pe cazuri concrete. Astfel, cursul începea cu un capitol despre numerele naturale, definite prin axiomele lui Peano, studiind amănunțit proprietățile lor inclusiv divizibilitatea. Urma un capitol despre inelul întregilor raționali, un altul despre corpul numerelor raționale, un altul despre numere cardinale, apoi despre fracții continue, ecuații diofantiene, inele de matrici, grupuri de permutări, vectori, ecuații și forme lineare, teorema lui Minkowski, transformări lineare, inele de polinoame, divizibilitatea în inele de polinoame, corpuri finite, etc.

Răsfoind cursul litografiat al prof. O. Onicescu din anul 1945, găsim acolo pagini despre grupul modular, corpurile pătratice, întregii unui corp pătratic, despre teoremele de descompunere în factori într-un corp pătratic, despre numerele reale, formele bilineare și formele pătratice, ș.a.m.d. După cum se vede, acest curs este pătruns de acea tendință aritmetizantă, caracteristică matematicii din acea vreme și chiar din epoca următoare pînă astăzi.

Preocupările de algebră și de geometrie sînt prezente în cercetările prof. O. Onicescu încă de la începutul carierei sale științifice, formînd obiectul unor publicații. Astfel, în lucrarea intitulată „Determination fonctionelle de l'addition" precum și în lucrarea „Sur la relation entre l'addition et la multiplication" ambele apărute în Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. din 1926— — 1927, D-sa regăsește diferite legi de compunere din geometrie și din mecanică, avînd proprietățile formale ale adunării. Aceste lucrări se încadrează în eforturile făcute de către matematicienii secolului nostru, eforturi care au condus la degajarea noțiunilor relative la structuri și la morfismele acestora precum și la categorii.

Întreaga operă a profesorului O. Onicescu este presărată cu cercetări de algebră, care au făcut obiectul preocupărilor sale și mai recente, ca „Representation and distributivity of Boolean algebras" (1961) sau „Binary, ternary operations and operators" (1963), ș.a.

Pe drumul deschis de către profesorul Octav Onicescu și D. Barbilian, în deceniul 1940—1950, cel de-al nouălea deceniu de existență al Facultăți noastre, algebra a luat un avînt fără precedent, de care sîntem conștienți și mîndri, astăzi.

Spiritul novator în învățămîntul algebrei, adus de către Prof. O. Onicescu acum 30 de ani, se regăsește în activitatea sa prodigioasă și în alte domenii ale matematicii; în preocuparea sa permanentă de a căuta sensul adevărat al științei și rostul omului de știință, care, după cum l-am auzit adesea spunînd, este acela de a servi. Și profesorul O. Onicescu a servit cu dăruire instituția noastră, Universitatea și în special Facultatea la care a lucrat o jumătate de veac; el a servit cu prisosință, cultura, societatea și înaltele idealuri ale acesteia.

CUVÎNTUL Inginer CIRIL PETRESCU

Onorat auditoriu,

În calitatea de cel mai vechi colaborator al Profesorului Onicescu, dintre cei care iau astăzi cuvîntul, vă cer îngăduința să vă istorisesc și eu ceva din vasta sa activitate didactică și științifică, altele decît cele ce v-au fost expuse pînă acum.

Cu mulți ani în urmă, — eram ambii tineri pe atunci, — bunul meu prieten Șerban Coculescu, fiul profesorului de astronomie de la Facultatea de Științe din București, pe care mulți dintre Dvs. l-ați cunoscut, îmi scrie de la Paris, unde rămăsese, după primul război mondial.

„Dintre tinerii români de la Paris, am cunoscut unul cu totul remarcabil. Îl cheamă Onicescu, are însușiri excepționale și cred că este destinat unui viitor strălucit". A omis să-mi spună însă în ce domeniu anume lucrează.

După cîtva timp, un afiș anunța la București o conferință despre Mecanică, ce urma să fie ținută de profesorul Onicescu, reîntors de curînd în țară.

Am fost printre primii auditori intrați în sală și, spre marea mea satisfacție, conferința a fost un eveniment excepțional. Acesta a fost primul nostru contact. Ceva mai tîrziu, Dsa. a organizat o serie de reuniuni ale profesorilor de mecanică, atît de la Universitate, de la Politehnică cît și din restul învățămîntului, în care s-a desbătut programa analitică și manualul de mecanică ce trebuia adoptat în liceu, unde această disciplină era destul de vitreg tratată. Ședințele erau prezidate cu multă eleganță de profesorul Pompei, dar intervențiile prof. Onicescu, animatorul și secretarul acestor reuniuni, m-au impresionat prin tactul extraordinar pe care l-a dovedit, mai ales cînd discuțiile luau o formă ceva mai personală și prea vie.

În 1929, regretatul meu prieten, Prof. Ing. Tudor Tănăsescu, cu care lucram pe acea vreme, m-a întrebat dacă nu cumva sînt dispus să organizez un laborator de mecanică, împreună cu Prof. Onicescu. Am acceptat, fără ezitare, o asemenea propunere și, în aceeași zi, am fost să-l văd pe profesor, cu care ocazie am călcat pentru prima oară în casa sa. Sînt mulți ani de atunci și pînă azi continui să mă duc!

E ca vorba cîntecului: Dîmbovița apă dulce
Cine bea nu se mai duce...

Am înființat deci împreună, la Academia de Educație fizică, primul laborator experimental de mecanica corpului omenesc, D-sa. ținînd prelegerile, iar eu lucrările practice. Anii de colaborare din acea vreme, urmați de o altă colaborare la Școala de Statistică, din 1930 pînă la 1947, alcătuiesc perioada cea mai bună din activitatea mea de o jumătate de veac. N-am să uit nici odată lungile discuții din același birou în care lucrează și astăzi și trebue să spun, cu puțin orgoliu, că toată formația mea științifică, peste cea inginerească, i-o datorez integral. Fiind însărcinat la Școala de Statistică cu cursul de mașini de calcul și organizare, am pătruns în noi domenii pe care Facultatea de Matematică din acea vreme nu le punea la dispoziție: probabilități, statistică matematică, actuariat și alte multe cunoștințe folositoare aduse de D-sa. pentru prima oară în cercurile științifice românești.

Ca rezultate ale activității la catedră și la conducerea ANEF, am să relev două principale:

— organizarea învățămîntului educației fizice, care a rămas, pînă astăzi, așa cum a trasat-o ca rector al acestei instituții.

— adoptarea unor metode de măsurare a performanțelor sportive, în vigoare și la Olimpiadele din zilele noastre; apoi, teoria sinergiei musculare ca studiu mecanic al corpului, precum și prezentarea funcțională a scheletului ca pîrghie de egală rezistență sau ca un element elastic.

O lege a cumulului a întrerupt însă activitatea sa la ANEF, iar o restructurare în învățămîntul superior a adus de asemeni încetarea Secției de statistică, actuariat și calcul la Facultatea de Științe, întîrziind astfel cu mulți ani funcționarea unui institut de calcul, repus în drepturile sale abia de cîțiva ani.

În anul 1930 urmau să înceapă lucrările pregătitoare pentru determinarea longitudinilor din toate punctele globului pe care se găsea instalat un observator astronomic dotat corespunzător cu mari instrumente meridiane. Lucrarea finală urma să aibă loc în 1933. La sfîrșitul anului am fost și eu chemat de către profesorii Coculescu și Demetrescu să le dau concursul pentru o

staţie de recepţie şi înregistrare a semnelor orare emise de marile staţiuni de telegrafie fără fir.

Operaţia era evident posibilă dar lipseau fondurile necesare! I-am expus această situaţie Prof. Onicescu care n-a ezitat să uzeze de tot creditul său personal pentru a ne obţine fondurile. În acest fel, graţie intervenţiei sale, Observatorul Astronomic din Bucureşti a participat la prima sa lucrare pe plan internaţional şi rezultatele prezentate atunci au fost printre cele mai bune din lume. Iată cum a înţeles Prof. Onicescu să sprijine cercetarea ştiinţifică în România şi să dea şi altora posibilitatea de a-şi pune în valoare potenţialul ştiinţific, deşi acest ajutor nu i-a adus altceva decît mulţumirile şi recunoştinţa noastră.

Am să-amintesc şi de o altă activitate a D-sa. cu rezultate fericite şi puţin miraculoase: odată cu reforma agrară efectuată după primul război mondial, a fost mare nevoie de un cadastru care să facă planurile moşiilor expropiate, parcelarea acestora şi evidenţa topografică a terenurilor. Pentru aceasta trebuia însă un personal numeros de operatori topometri. Existau într-adevăr cîţiva ingineri hotarnici şi silvicultori, dar numărul lor era cu totul neînsemnat faţă de nevoi.

Ca să se acopere acest gol, s-a înfiinţat o şcoală de topometrie pe lîngă cadastru. Elevii care au acceptat să urmeze această şcoală, formau o populaţie tare heteroclită: absolvenţi de liceu fără bacalaureat, cei mai mulţi din secţia modernă, certaţi cu matematicile, absolvenţi ai şcolilor de meserii, funcţionari care nu putuseră depăşi gradul de impiegat şi alţii. Instruirea acestora în tainele trigonometriei, constituia un act de mare curaj şi răspundere. Prof. Onicescu, cu darul său pedagogic, înăscut, a reuşit să facă din aceşti elevi, operatori topometri capabili să se achite convenabil de sarcina încredinţată. Nu pot să trec cu vederea şi tenacitatea cu care a reuşit să impună în această meserie diviziunea centezimală a cercului precum şi utilizarea tabelelor de valori naturale în locul logaritmilor, cu toată opoziţia teribilă a hotarnicilor de şcoală veche. Pasul acesta în modernizarea unei discipline este similar cu cel al adoptării diviziunii zecimale la sistemul metric faţă de toate diviziunile binare din care ultima — ţolul englez — a dispărut de curînd.

Pentru toată această activitate de profesor eminent om de ştiinţă şi excelent organizator, grefată pe un suflet de o rară distincţie şi bunătate, îi dorim Profesorului Onicescu sănătate şi viaţă lungă spre a continua să fie pentru noi toţi un far şi un model.

CUVÎNTUL Prof. VALERIU BULGARU

Onorată asistenţă,

În viaţa culturală a poporului nostru, istoria învăţămîntului a relevat adesea nu atît durata activităţii vreunui dascăl de seamă, ci, mai ales, nivelul înalt al gîndirii şi puterii sale de creaţie în ştiinţă şi societate. Cînd însă o soartă favorabilă a îngăduit să se îmbine strălucirea unor înalte calităţi inte

lectuale cu o viață îndelungată, activitatea profesorului universitar, ctitor al atîtor generații de specialiști și de oameni de știință, se înscrie în chip firesc ca un aport de seamă într-o întreagă etapă a dezvoltării societății însăși.

Un astfel de exemplu viu și luminos, îl oferă cariera profesorului Octav Onicescu pe care îl sărbătorim astăzi la împlinirea vîrstei de 80 de ani, a peste 50 de ani de muncă rodnică atît la Universitatea din București cît și pe alte multiple cîmpuri de activitate ale științei și culturii.

Să-mi fie îngăduit ca profesor al acestei Universități, ca apropiat colaborator la Centrul de Statistică Matematică al Academiei și ca membru în Consiliul Științific al Direcției Centrale de Statistică, să evoc aici cîteva aspecte din îndelungata și rodnica activitate a profesorului Octav Onicescu, pe variatele tărîmuri care depășesc specialitatea strictă a disciplinelor matematice și care îmbrățișează, de la filozofie și pedagogie la economie și agricultură, o variată creație stimulatoare de valori materiale și umane.

Intrat foarte tînăr în cariera didactică, mai întîi la renumitul colegiu militar de la mănăstirea Dealu, în preajma izbucnirii primului război mondial, la care a și luat parte, profesorul Octav Onicescu aparține acelei generații de înaintași care, după primul deceniu al acestui veac, au fost prezenți pe fronturile de luptă națională și culturală, unde s-au creat și consolidat fundamentele statului român întregit.

Dar, pe lîngă cariera strălucită de profesor și de om de știință în disciplinele matematice, activitatea se va îmbrățișa curînd variate domenii în care servește mai departe știința, dar în vederea soluționării unor însemnate probleme economice și sociale.

Astfel, încă din anul 1924, la Societatea „Natura" va lucra pentru răspîndirea științei, pe toate ținuturile românești, alături de acei mari dascăli și eminenți oameni de știință care au fost profesorii Gheorghe Țițeica, Gh. Longinescu, Ion Simionescu și Traian Săvulescu.

Trecînd de la teoriile științifice la aplicațiile concrete ale calculului probabilităților în viața practică, el desfășoară o acțiune remarcabilă pentru reorganizarea societăților de asigurare și pentru crearea și instruirea corpului de actuari, la nivel internațional. Ca președinte al Casei Generale de pensii, inspiră îmbunătățirea legislației pensiilor și contribuie la însănătoșirea bazelor financiare ale acestui însemnat așezămînt.

Dar una din cele mai îndelungate și strălucite activități ale profesorului Octav Onicescu s-a desfășurat în direcția creării și dezvoltării unui învățămînt statistic național, a cărui însemnătate și prestigiu va crește pînă la cel mai înalt nivel științific. Începutul se face cu prilejul recensămîntului general al populației din 1930, creind și conducînd, în calitate de director, Școala de Statistică, menită să formeze prima rețea de statisticieni județeni. Această școală a constituit prima formă de învățămînt statistic din țara noastră, acoperind prin programul său principalele cîmpuri teoretice și practice ale statisticii matematice, iar prin corpul său didactic formînd o pleiadă strălucită a științei române de astăzi.

În 1934, la propunerea prof. O. Onicescu Şcoala de Statistică a fost alipită pe lîngă Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti, ca o secţie de specializare după modelul Institutului de Statistică din Paris. Iar în 1941 se constituie, într-o nouă formă, în cadrul Universităţii din Bucureşti, Şcoala de Statistică, actuariat şi calcul sub direcţia prof. O. Onicescu. Apare astfel o nouă ramură de învăţămînt a Universităţii româneşti: învăţămîntul statisticii şi al disciplinelor care depind necondiţionat de ea. Acest învăţămînt avea atît caracterul pluridisciplinar, fiind accesibil tuturor studenţilor de la diferite facultăţi, cît şi postuniversitar, prin aceea că forma specialişti în statistică dintre licenţiaţi, ingineri diplomaţi şi absolvenţi ai diferitelor specialităţi din învăţămîntul nostru superior.

Această activitate de îndrumător în domeniul statisticii româneşti, se concretizează după cel de-al doilea război mondial printr-o colaborare strînsă şi rodnică cu Direcţia Centrală de Statistică şi Consiliul său Ştiinţific.

Profesorul Octav Onicescu înfiinţează şi conduce aici Seminarul permanent de Teoria statisticii şi Biometrie, care strînge laolaltă cu tot mai mult interes specialiştii de seamă din Direcţia Centrală de Statistică, din Centrul de Statistică matematică al Academiei RSR, din Institutul pentru Economia agrară al Academiei de Ştiinţe Agricole şi Silvice, Institutul de cercetări economice, Comitetul de Stat a Planificării, Ministerul Finanţelor, Centrele de Calcul, etc. La acest seminar au prezentat expuneri şi au purtat discuţii şi specialişti de reputaţie mondială ca Vasili Leontieff, N. Georgescu-Roegen, A. Kaufmann, M. C. Kendall şi alţii.

Dar mai presus de toate, seminarul a realizat o deschidere largă asupra celor mai stringente probleme ale actualităţii economice şi sociale, unde riguroasele metode statistice şi matematice erau solicitate să găsească soluţii sau să verifice rezultatele activităţilor practice la nivelul celor mai noi procedee ale ştiinţei. În acest cadru, aportul prof. O. Onicescu a fost covîrşitor, stîrnind interesul şi admiraţia auditorilor prin ascuţimea şi pătrunderea intervenţiilor şi contribuţiilor sale. Trebuie să menţionez că încă din 1968 D-sa a pus în discuţie teoria şi metodologia controlului calităţii producţiei, apoi aplicaţiile energiei informaţionale în diferite ramuri ale cercetării aplicative, iar cu totul recent a prezentat noua sa teorie asupra corelaţiei informaţionale, care se dovedeşte a fi un instrument de seamă pentru măsurarea semnificaţiei datelor statistice complexe.

De o receptivitate rar întîlnită pentru tot ceea ce este nou în viaţa ştiinţifică şi socială, plin de bunăvoinţă şi înţelegere pentru cei tineri, ca şi pentru începătorii mai vîrstnici, entuziast pentru orice iniţiativă menită să contribuie la progresul ştiinţei şi al culturii în ţara noastră, profesorul Octav Onicescu întruchipează un mare exemplu de nobilă şi neobosită dăruire de sine.

Un chip luminat, o minte deschisă, o inimă caldă, iată simpla dar adevărata figură a intelectualului patriot şi umanist, a strălucitorului nostru profesor pe care prima Universitate a ţării se mîndreşte şi se bucură să-l omagieze sărbătoreşte, astăzi, aici.

CUVÎNTUL Conf. I. CUCULESCU
Facultatea de Matematică-Mecanică

Stimați tovarăși,

Am urmat cursul special al Prof. Octav Onicescu, mi-am susținut lucrarea de diplomă, sub conducerea Dsale., am fost membru al catedrei al cărei șef era, am fost doctorand avîndu-l drept conducător științific. În toate aceste ocazii am primit dela Dsa. extrem de mult; pot spune chiar că, datorită personalității sale, însuși conceptul de conducător științific căpăta un conținut nou, mult superior imaginii obișnuite pe care ne-o făurim despre profesori și îndrumători.

Nu voi încerca să descriu aici sub toate aspectele imaginea ce o am asupra personalității Prof. Onicescu, voi arăta doar cîteva aspecte pe care am putut să le sesizez în mod nemijlocit.

Timpul are asupra personalității Prof. Onicescu un rol mereu mai constructiv. Cei 80 de ani de viață pe care-i omagiem astăzi sînt, pur și simplu, „de două ori patruzeci" și sînt convins că în viitoarele ocazii de sărbătorire ne va apărea și mai îmbogățit spiritualicește, în același ritm alert.

Alături de Dsa. drumul pare mai larg în știință și în învățămînt. Cunoașterea profundă a oamenilor îi permite să ofere debutanților o încredere care-i eliberează de preocuparea de a o căuta. Ceea ce face Dsa. este tocmai ceea ce nu poți face tu, iar cele ce-ți revin să faci sînt acele experiențe intelectuale pe care Dsa. le-a trăit evident într-un alt context. Este prin urmare, un transfer de trăiri și experiențe, în urma căruia tu te simți mai îmbogățit în propria ta structură. Așa zisele „răscruci" nu-ți apar drept marcate de pericolul alegerii unei soluții greșite ci, mai degrabă, prilejuri de continuare, completare și precizare a propriei personalități.

Profesorul O. Onicescu este un matematician prin excelență, însă un matematician care pătrunde în alte domenii ale științei aparent mai apropiate sau mai îndepărtate de matematică, în învățămînt, în viața socială etc., rămînînd însă în toate cazurile matematician. În nici una din situațiile în care l-am putut urmări, n-am simțit vreodată oricît de vag, că ar fi încetat de a fi un matematician, devenind un altul. Din această cauză, sfatul său, niciodată impus, totdeauna cerut, era de cea mai mare valoare pentru noi; astfel ne puteam permite să abordăm în discuțiile cu Dsa. cele mai variate teme cu optica și rigoarea matematicianului.

Ca matematician, eu am văzut în Prof. O. Onicescu un adevărat savant, în sensul că Dsa. era permanent preocupat de valoarea unei descoperiri pentru evoluția generală a cunoașterii matematice. Ori de cîte ori era vorba de un anumit domeniu modern al matematicii, își punea problema influenței domeniului respectiv asupra dezvoltării întregii matematici.

Nu este astfel de mirare că încuraja și sprijinea direct, prin prezența și atenția Dsa., seminarii în domeniile cele mai variate ale matematicii. Citez cîteva dintre cele la care am participat: semigrupuri, topologie algebrică (la care expunea Prof. Bucur), algebre și grupuri Lie, teoria jocurilor, diferite capitole moderne ale teoriei probabilităților.

Mă voi referi în special la Teoria funcțiilor sumă, în care contactul intelectual între mine și Dsa. a fost deosebit de strîns. Această teorie a fost creată de Prof. O. Onicescu din dorința de a simplifica prezentarea întregii teorii a probabilităților, înlăturînd complicațiile legate de faptul că, de pildă, în cazul valorilor medii condiționate, variabilele aleatoare nu apar ca „indivizi" ci drept clase de echivalență.

Dsa. a avut și continuă să aibă un entuziasm deosebit pentru această idee. Actualmente, pe baza rezultatelor obținute urmează să apară o carte cu o expunere concretă a teoriei probabilităților pe aceste baze, la elaborarea căreia am cinstea să colaborez cu Dsa. — Doresc să adaug că, fiind în strîns contact, pe această cale, cu conceptul de probabilitate pe algebre Boole, am avut ideea de a renunța la distributivitate, păstrînd relația Dedekind. Aceasta m-a condus la conceptul de probabilitate pe algebre von Neumann (necomutative), preocupări care mi-au adus, pînă acum, cele mai mari satisfacții științifice.

Prin siguranța și seninătatea cu care privește și participă la viață, în primul rînd la cea științifică, consecințe — cred eu — ale modului excepțional în care și-a trăit cei 80 ani de viață, Prof. Onicescu constituie pentru noi un exemplu pe care dorim să-l urmăm. Aș fi fericit ca, ajungînd la vîrsta Dsa., să pot privi înapoi cu aceeași mulțumire.

În încheiere, urez Prof. Octav Onicescu și soției sale ani mulți împreună și bucuria marilor succese în știință și în întreaga activitate.

CUVÎNTUL Conf. SILVIU GUIASU

Facultatea de Matematică-Mecanică, București

Cu cinci ani în urmă, Academia Română l-a sărbătorit pe Profesorul Octav Onicescu cu ocazia împlinirii vîrstei de 75 de ani. Am fost sigur, atunci, că peste cinci ani ne vom reîntîlni pentru o nouă sărbătorire.

În acești ultimi cinci ani, Profesorul Onicescu a desfășurat o muncă extrem de intensă și sistematică, dînd la iveală numeroase articole și cărți. Ar fi suficient să amintesc în acest sens cărțile „Principes de logique et de philosophie mathématique", „Principiile teoriei probabilităților", „La Mécanique statistique" sau „Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară". Cinci ani, care numai ei, și ar fi fost suficienți pentru a impune o personalitate.

Foarte fructuoasă a fost, de asemenea, activitatea Domniei Sale ca rector la Centrul Internațional de Științe Mecanice, cu sediul la Udine, în Italia. Am avut și eu ocazia să țin lecții, în vara anului trecut, în cadrul acestui Centru, fiind impresionat de buna organizare, dotare și circulație a specialiștilor.

În toată această perioadă, am continuat să-l vizitez pe Profesorul Octav Onicescu în camera sa de lucru din casa veche de pe strada Șoimăreștilor nr. 9. Cufundați în cele două fotolii, la adăpostul cărților care acoperă, pînă

la tavan, cei patru pereți ai camerei, lăsînd doar puțin loc pentru portretele lui Poincaré, Enescu și Castelnuovo, ne-am informat adeseori unul pe altul despre ceea ce am realizat sau n-am realizat, despre ceea ce am citit mai deosebit sau, pur și simplu, despre frămîntările de fiecare zi. Nu de puține ori, anii care ne despart dispăreau ca prin farmec. Prietenia aceasta a devenit pentru mine, cu trecerea anilor, un lucru de preț. Vorbindu-i despre preocupările și gîndurile mele, am simțit de cele mai multe ori o încurajare caldă, uneori o dezaprobare discretă dar fermă. Niciodată însă indiferență.

M-am gîndit uneori ce m-a impresionat mai mult la Profesorul Onicescu. În acest sens ar trebui să amintesc poate despre ușurința cu care se mișcă în multe domenii ale matematicii, despre receptivitatea și aderența la idei foarte noi, despre considerarea matematicii în general și a teoriei probabilităților în special doar ca un instrument, indispensabil însă, al științelor naturii, despre reîntoarcerea continuă la lucrările clasicilor (un adevărat cult pentru Poincaré, Riemann, Gibbs, Boltzmann) sau despre curajul de a aborda un domeniu nou fără prejudecăți. Totuși, ceea ce m-a impresionat în cea mai mare măsură a fost bucuria muncii, certitudinea că o pagină proaspăt sosită din tipografie și mirosind a cerneală poate să te emoționeze și după 55 de ani de carieră.

Cîndva, demult, am citit undeva, poate că în Reichenbach, o părere potrivit căreia timpul ar fi o entitate bidimensională, cu o componentă fizică și una informațională. Mi-am reamintit aceasta acum cîteva zile. Privindu-l pe Profesorul Octav Onicescu mi-am dat sema că nu ar fi deloc exclus ca să existe posibilitatea de încetinire a scurgerii timpului pe componenta sa fizică printr-o trăire compensatorie, mai intensă, mai accelerată, pe cealaltă componentă, cea informațională.

Acum, la cea de-a 80-a aniversare, urez Profesorului Octav Onicescu și soției sale, Doamna Luiza Onicescu, multă fericire și mulți ani. De altfel, pot să vă mărturisesc, Profesorul Onicescu are în prezent o mulțime de planuri, o mulțime de proiecte. Și să închei cu cuvintele sale: „Mergem mai departe!"

RĂSPUNSUL Acad. OCTAV ONICESCU

Doresc, mai înainte de toate, să mulțumesc tuturor celor care au avut măgulitoarea inițiativă a acestei ședințe, tuturor celor care au avut cuvinte prea bune și calde pentru activitatea mea și tuturor celor prezenți în această sală de mari și scumpe amintiri pentru mine.

Bună parte din tinerețea mea s-a petrecut cu gîndul spre viitor; în el proiectam dorințe și speranțe mereu sprijinite pe o filozofie.

La șaptezeci de ani începusem a privi cu intensă atracție trecutul cu amintirile lui adesea copleșitoare și mă temeam de ceasul cînd urma să

spun, asemenea poetului: „Este amar și dulce să asculți lîngă foc, aidoma unui bătrîn soldat ce veghează în cort, cum se trezesc încet vechi amintiri".

Dar n-a fost după imaginea poetului.

Bătrînul soldat veghează, ce-i drept, dar nu ca să asculte povești ale trecutului ci ca să scruteze prezent, alături cu ceilalți, valurile necontenit înnoite ale prezentului.

Încerc, mai departe, să opresc clipa, să o încarc de toate potențele ce-i pot fi gîndite, dînd astfel ființă, în această zi, viitorului, făcîndu-l să vibreze chiar în cuprinsul ei. Mi-e greu să mai despart din viața clipei prezente certitudinile trecutului de aspirațiile la ce urmează să fie.

Caut să le trăiesc împreună în acest permanent azi, așa cum e și existența societăților umane, a noastră, cu deosebită intensitate, care își aduc, își creează chiar, viitorul prezent. Care-i vor împlinirea prin copiii pe care îi cresc, prin instituțiile ce proliferează, prin dinamismul accelerat în care vor a se realiza.

Pretențioase sau voit paradoxale aceste afirmații care par a înneca viitorul în prezent? Nici mai paradoxale, nici mai subiective, necum mai pretențioase decît știința însăși cu principalele sale instrumente de explorare a Universului în cuprinderea spațială și temporală.

Cînd scriem o lege de desfășurare în timp a unui fenomen, a mișcării planetelor, a creșterii unei populații, sau a propagării unui curent electric, închidem într-o gîndire actuală, într-un act al prezentului, întreaga sa evoluție viitoare.

Este mai vorbitor încă dacă această lege este exprimată prin diferențiale sau, mai bine spus, prin derivate. Alături de valorile mărimilor, derivatelor lor, scrise toate la același moment, în același azi permanent, nu reprezintă doar o cezură în timp între trecut și viitor, ci un prezent intensificat prin caracteristici specifice în care acționează timpul ca într-o germinare, ascunsă vederii noastre, dar mobilizatoare a factorilor pe care-i dinamizează.

Dar nu numai prin atari acte se realizează știința acestui azi permanent al fenomenologiei universului. Potențialitatea azi-ului științei trebuie să prevină surprizele bogate ale demonilor uneori capricioși ai experienței și ai vieții însăși și în aceeași vreme, să se conforme sentimentului intim de libertate care veghează asupra fiecărei manifestări a conștiinței noastre, a conștiinței cercetătorului de adevăr, în formele cele mai acute. S-a creat pentru aceasta procesul stochastic în care etalăm, în același moment, în același azi permanent al gîndirii, toate fațetele posibile ale unui eveniment, cu probabilitățile lor, așa cum trebuie supuse alegerii conștiinței noastre.

Nu vreau să neg cu aceste gînduri nici trecutul ca o realizare concretă și unică, nici viitorul ca o împlinire de atîtea ori numai posibilă, dar nici nu le amestec într-o unitate matematică amorfă, cum au crezut unii a avea dreptul să o facă, în acel univers cu patru dimensiuni al teoriei relativității în care dispare *înainte* și *după*, în care *simultaneitatea*, deci azi-ul, este o iluzie ce ia locul oricărui concret.

---

*) Gînduri inspirate de primele două strofe ale poemului lui Charles Baudelaire „La cloche félée".

A trebuit să așezăm acel univers al lui Einstein — Minkowski la locul său de spațiu matematic abstract reprezentativ doar al operațiilor de măsură de distanță și de timp, pentru a-l elibera de jocul fluturilor nebunatici ai imaginației care a menținut atîta vreme o zonă de irealitate în jurul acestei teorii.

Spațiul și timpul, cu al lor azi, cu al lor prezent permanent, își păstrează ființa concretă, iar teoriile asupra mișcării inerțiale sau în cîmp a materiei lasă loc și variabilității operațiilor de măsurare, respectînd invarianții fundamentali ai sistemelor considerate.

Am trăit cu pasiune această interpretare a aspectului mecanic al dinamismului materiei universului nostru, pentru a-l gîndi cît mai aproape de concret, respectîndu-i exigențele fundamentale, ireductibile după datele ce ne impune azi experiența.

În reflecțiile despre inerție ale lui Newton, în faptul de a fi dat acestei inerții un loc așa de important între principiile sale, am găsit imboldul de a-i înțelege cît mai complet funcția sa de legătură indisolubilă între materie și spațiu prin mișcare. Și aceasta nu numai pentru un unic corp în mișcare dar pentru corpurile oricărui sistem, începînd cu două corpuri, și terminînd cu Universul în întregimea sa. Se pun, pe această cale, în evidență drept efecte inerțiale ceea ce Newton a numit atracția gravitațională, precum și ceea ce Hubble s-a mărginit să constate ca mișcare de îndepărtare a galaxiilor unele de altele, după o lege cinematică de o mare simplitate.

În ce măsură intensitatea atenției mele la aceste probleme a fost întreținută de gîndirea einsteiniană, pe care am urmărit-o fascinat de îndrăzneala și frumusețea matematică a soluțiilor, aceasta este greu de caracterizat altfel decît ca o permanentă prezență cu atît mai îndemnătoare spre poziții, aș zice contrare, cu grija însă să nu fiu rău înțeles, de aceea prefer să spun *total diferite*.

Sprijinul tehnic al construcției Mecanicii pe care am numit-o o *invariantă*, vine din gîndirea atît de adînc adecvată științelor naturii a lui Poincaré, mai cu seamă prin promovarea invarianților integrali perfecționați de Elie Cartan.

În lumina aceleiași legi de mișcare a Mecanicii invariantive se oglindesc toate proprietățile actuale ale materiei răspîndită în univers, începînd cu sisteme elementare pînă la cele formate de galaxiile ce ne populează cerul.

Două lucruri scapă acestei viziuni la care ajungem conducînd raționamentul după principiile schițate, mai înainte e drept, cam vag: *originea* și *sfîrșitul* acestei lumi materiale. Oare nu în *origini* stă esența aceea ce numim trecut și nu în genunea sfîrșitului, dacă putem vorbi de el, stă efectiv cheia viitorului în toate procesele Mecanicii, ca să nu mai vorbim de cele în care intră viața?

Ceea ce numim în Mecanică valori sau situații inițiale ale unui sistem sînt de aceeași natură cu stările prezente. Stările de origină ale sistemelor materiale aparțin în genere altei lumi, care transcende calitativ pe a noastră, iar trecerea este catastrofică ca orice act de creație. Am rezervat cuvîntul „catastrofic", ca să-l aplic acelor teorii verbale în care se complac prea mulți cosmologi, mîndri că înlocuiesc cu iluzia vorbelor pe aceea totuși mai gravă a „cuvîntului".

Jacques Monod lasă începuturile, atît ale lumii materiei cît şi a celei organice — ale vieţii — în seama întîmplării, a hazardului, folosind termenul francez. Am trăit ani îndelungaţi în tovărăşia hazardului şi a ştiinţei care îl manipulează prin probabilităţi, dar, între început şi sfîrşit m-am obişnuit să pun acest hazard la sfîrşitul lucrurilor, acolo unde îl aşează şi termodinamica şi unde-l facem tovarăş morţii. A-l situa şi la începutul vieţii materiale, sau vieţii propriu zise, a îngemăna creaţia cu moartea, a le atribui o structură comună, n-au făcut nici Poë, nici Baudelaire şi nici unul din filozofii pe care-i cunosc; şi nu încerc nici eu să adopt această cale a unei permanente întoarceri trecînd prin neant.

Drumul vieţii ca şi al materiei este ireversibil. Azi-ul teoriilor şi trăirilor noastre are un sfîrşit. Am căutat să înţeleg şi eu acest drum entropic al morţii sistemelor mecanice cu foarte multe componenţe.

Multă vreme numai în tovărăşia lui Gibbs, a lui Boltzmann şi Poincaré, mi s-a alăturat acum în urmă pasiunea de cercetare a lui Silviu Guiaşu. Cred a fi găsit lămurirea paradoxului creat de opoziţia între reversibilitatea legii de mişcare a componentelor şi ireversibilitatea sistemului, modificînd pe cea dintîi, introducînd în legea de mişcare parametrii aleatori, transformînd deci esenţial, acel prezent strict determinist al legilor într-un prezent aleator, care deschide odată cu un orizont mai larg şi drumul ireversibil al uniformităţii şi deci al morţii.

Sînt puternic îndemnat, acum, să evoc timpurile îndepărtate ale creării proceselor stochastice numite „cu legături complete", care au însemnat principalul ciment al relaţiilor dintre atîţia matematicieni şi statisticieni aici de faţă nu numai prin truda comună în jurul unor idei noi, dar şi prin acea legătură adînc umană a prieteniei. Mă voi ţine totuşi de program şi nu voi aminti de aceste procese decît pentru a arăta cît sînt ele de valabile astăzi nu numai în tratarea mixtă, mecanică şi probabilistă, pe care o impune mecanica statistică. Ele sînt chemate să reprezinte importante procese naturale care implică pe de o parte multe elemente ale trecutului iar pe de altă parte, acele rezerve pentru viitor ce corespund unor adecvaţi parametrl aleatori. Prietenul Mihoc mă va ierta, pentru scurtimea acestor consideraţii, dar el este astăzi stegarul principal al acestei doctrine.

Îmi veţi îngădui să mai fac o dreptate acelui lung drum al tovărăşiei cu întîmplarea pe care l-au reprezentat pentru mine probabilitatea şi procesele probabiliste; datorită lor am fost pregătit să accept teoria lui Shannon ca modelul mult aşteptat al comunicaţiilor noastre cu natura, ca şi al comunicaţiilor dintre oameni. Datorită acestei lungi comunicări cu probabilităţile am reuşit să recunosc că universurile fiinţei noastre organice, a experienţelor noastre relative la ele, ale gîndirii noastre ca şi ale tuturor ştiinţelor, sînt reflectate sau măcar acoperite de o lume de sisteme informaţionale. Ele constituie, fără nici o îndoială, o platformă dintre cele mai cuprinzătoare a oricărei filozofii care, obligată să depăşească fiece experienţă individuală directă şi fiece ştiinţă particulară, se situează, cu necesitate, cel puţin la uivelul sistemelor informaţionale şi va fi condiţionată de ele în acelaşi mod în care cunoaşterea ştiinţifică este condiţionată de limba în care se exprimă.

La sfîrşitul unei analize a capacităţii interpretative pe care o închide teoria informaţiei am ajuns la concluzia că putem considera universul relaţiilor noastre cu ajutorul mijloacelor pe care ni le pune la dispoziţie această teorie, care, fără să fie ea însăşi o filozofie, este capabilă să constituie baza unui sistem în care să intre formele cunoaşterii valorilor estetice şi morale sau ale acţiunilor noastre sub un aspect unitar, după cum unitară este această structură de bază.

Să întrerup acum acest curs al gîndirii pentru o mărturisire. Avînd să fac la Universitatea din Trieste un şir de lecţii despre teoria informaţiei, am încercat să adopt, ca instrument de măsură a informaţiei, energia informaţională în locul entropiei lui Shannon. Totul a mers bine pînă la teorema lui Shannon care fundează existenţa codurilor, care fundează posibilitatea înţelegerii noastre cu natura. Pentru a o demonstra a trebuit să revin la entropie — care deşi mai complicată, ca expresie, dădea o demonstraţie simplă.

În schimb estimaţiile structurilor statistice efectuate cu ajutorul entropiei sînt incomparabil mai complicate şi mai puţin sugestive ca cele care au la bază energia informaţională, aşa cum s-a evidenţiat în numeroase împrejurări. Calitatea de instrument statistic al energiei informaţionale a apărut şi în calculul coeficientului de corelaţie care se arată un instrument adecvat pentru studiul spaţiilor funcţiilor de repartiţie deschizînd astfel un nou drum al statisticii matematice şi aplicaţiilor ei în variate domenii, mai cu seamă în cele pur calitative în care informaţia este dată nu de valorile unei mărimi ci de frecvenţe.

Este oare surprinzătoare constatarea că între aceste cîmpuri ale preocupărilor mele există, în afară de anume legături de conţinut, şi o legătură formală, logică, o atitudine în faţa actului de cunoaştere şi apoi de elaborare a lui. Ea constă în necesitatea unei suficient de clare caracterizări a obiectelor. Nu avem ştiinţă decît de obiecte şi relaţii între sau despre ele.

Am refuzat totdeauna, cînd mi-am dat seama, bineînţeles, că era cazul, caracterizările vagi sau sprijinite pe autoritate. Obiectele la care m-am oprit, în cercetările ce am întreprins ca şi în învăţămîntul ce am profesat au trebuit să-mi fie clare şi bine individualizate pentru înţelegerea mea. Conceptul de variabilă aleatoare simplă şi de dependenţă între variabile aleatoare simple au fost printre cele dintîi rezultate ale criticii de precizare a lor ca obiecte ale cunoaşterii. Rezultatul a fost lanţul cu legături complete.

De altfel, în general, numai prin exacta observare a obiectului se poate înţelege logica internă a proceselor naturale, determinată de recunoaşterea obiectelor acestui determinism, dincolo de graniţele concepţiei lui Laplace sau a lui Claude Bernard. Obiectele noului determinism pot fi structuri, deci repartiţii; în care caz, legea nu se mai exprimă prin ecuaţii diferenţiale ci prin procese aleatoare.

Filozofia obiectului trebuie concepută ca o critică acoperind întregul domeniu al cunoaşterii. Am arătat prin exemple cum ea înlătură paradoxele teoriei mulţimilor, în orice caz acelea pe care le-am examinat, şi cred că pot afirma că ea vine la micşorarea greutăţilor de orientare printre antinormele kantiene.

Un rezultat al acestei căutări a obiectelor a fost conceptul de funcţie sumă ce mi se pare chemată a lămuri multe probleme ale teoriei probabilităţilor şi mai cu seamă ale proceselor stochastice, cum rezultă mai cu seamă din ultimele lucrări, încă nepublicate, ale lui I. Cuculescu şi al cărui spaţiu este un obiect precizat cu deosebită siguranţă de Romulus Cristescu.

Un alt rezultat al meditaţiilor în jurul filozofiei obiectului este prezentat de cele două categorii ale logicii adevărului sau a obiectelor; pe care le-am numit pe una *epistomologică* şi pe cealaltă *ontologică*. Cea din urmă posedă o structură izomorfă cu Aritmetica, modelul clasic al ştiinţelor cu obiecte bine definite.

Termin aici discursul asupra acestei filozofii critice a obiectului, călăuză şi a activităţii mele în sînul Seminarului de Economie matematică, căreia îi atribui o pondere deosebită printre silinţele prezenţei mele. Aceeaşi grijă a disciplinei logice şi funcţionale a obiectelor mă conduce în mod esenţial şi în acţiunea pe care o exercit la Centrul Informaţional al Ştiinţelor mecanice de la Udine. Acest Centru a fost creat şi pentru a promova claritatea şi precizia în definirea şi manipularea obiectelor mecanice introduse în disciplinele atît de variate ale acestei ştiinţe. În unele dintre, ele mai cu seamă în cele legate mai direct de tehnică, se manifestă mereu tendinţa de autonomizare atît faţă de natură cît şi faţă de omul care le crează: aş zice chiar tendinţa de dezumanizare. Cauza acestor puţin filosofice deviaţii este, în genere, defectuoasă definiţie a obiectelor, lăsate arbitrar în afara legăturilor lor organice şi de gîndire cu natura pe care principiile mecanicii teoretice, în oricare dintre variantele sale, le respectă cu mare evidenţă. Cînd se îndepărtează de gîndirea teoretică şi de natură, atunci tehnica se dezumanizează şi cu aceasta îşi pune singură premizele sfîrşitului, al cărui glas se aude prea des în ultima vreme.

Ştiinţa este creaţia noastră, fruct al gîndirii asupra naturii. Obiectele sale modelate din magma în continuă schimbare a fenomenelor experienţei prin virtuţiile logice ale acestei gîndiri, se detaşează grăbit de noi prin procesul de constituire a unor discipline în organizaţii autonome, ca expresii ale Adevărului care se vrea universal şi etern, dincolo de subiectul care i-a dat fiinţă. Dar este universal doar în raport cu omul „individual" şi izolat care o gîndeşte. Iar etern, etern este cît poate fi şi omenirea a cărei umbră nedespărţită este acest Adevăr cu ştiinţele şi tehnicile sale ce-i împlinesc prezentul în care se implică existenţa noastră.

Vă mulţumesc!

ANALELE UNIVERSITATII BUCURESTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XXII — Nr. 2 — 1973

9

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ—MECANICĂ

ANUL XXII — NR. 2 — 1973

MATEMATICĂ – MECANICĂ

Editura
ANALELE UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
Şoseaua Panduri Nr. 90
Telefon 314000/131

SUMAR

SOMMAIRE

DETERMINAREA SOLUȚIEI ELEMENTARE A ECUAȚIEI CU DERIVATE PARȚIALE LINIARE DE ORDINUL 2n, DE TIP HIPERBOLIC CU PÎNZA CARACTERISTICĂ MULTIPLĂ DE ORDIN n.
I) CAZUL UNUI NUMĂR IMPAR DE VARIABILE INDEPENDENTE

VERONICA ANTOHI-TEODORESCU

În [1] se găsește forma ecuației cu derivate parțiale liniare de ordin 2n, de tip hiperbolic cu pînză caracterisrică multiplă de ordin n, astfel încît ecuația să admită soluții cu singularitate algebrică.

În acest asticol se determină forma invariantă a ecuației

$$(1)\quad \mathrm{Lu} = a_0^{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2n}}} + a_1^{i_1 \dots i_{2n-1}} \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2n-1}}} + \dots + a_{2n-1}^{i_1} \frac{\partial u}{\partial x^{i_1}} + a_{2n} u = 0,$$

$$a_0^{i_1 \dots i_{2n}} = p^{i_1 i_2} p^{i_3 i_4} \dots p^{i_{2n-1} i_{2n}},$$

cu coeficienții $p^{i_\alpha i_{\alpha+1}}$, $a_j^{i_1 \dots i_{2n-j}}$ $(j = 1, \dots, 2n)$ funcții analitice, olomorfe într-o regiune D a spațiului $R_m(x^1, \dots, x^m)$ cu m dimensiuni, astfel încît să admită o soluție de forma

$$(2)\qquad u = vF(G) + w.$$

Capitolul I

FORMA INVARIANTĂ A ECUAȚIEI (1) CÎND FORMELE A_ν SATISFAC CONDIȚIILE [1]

$$(3)\qquad \begin{cases} A_0 = P^n \\ A_\nu = -H_{\nu-1}^{\nu} + \sum\limits_{\alpha_\nu = l-\nu+1}^{n-\left[\frac{\nu}{2}\right]} A_{\nu\alpha_\nu} P^{\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, l;\ l < n-1) \end{cases}$$

și determinarea soluției elementare corespunzătoare.

& 1. FORMA INVARIANTĂ A ECUAȚIEI

Considerăm forma pătratică $P = p^{ij}\pi_i\pi_j$. Fie g_{ij} minorii normalizați ai determinanrlui $|p^{ij}|$. Cu ajutorul lor construim elementul de arc riemannian

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{4}$$

Să notăm prin

$$\Delta_2 u = g^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta},\ \theta_\mu u = b^{i_1\dots i_\mu}u_{i_1\dots i_\mu},\ \Delta(u, v) = g^{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta \tag{5}$$

operatorii diferențiali de ordinul 2, respectiv de ordinul μ, unde $u_{i_1\dots i_\mu}$ reprezintă derivata covariantă de ordinul μ a funcției u în raport cu $x_{i_1}, \dots, x_{i_\mu}$, iar $b_\mu^{i_1\dots i_\mu}$ vectori contravarianți de ordin μ. Formele multiliniare asociate operatorilor (5) vor fi

$$P = g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta,\ T_\mu = b_\mu^{i_1\dots i_\mu}\pi_{i_1}\dots\pi_{i\mu}. \tag{6}$$

Ecuația cu derivate parțiale respectivă va avea forma invariantă

$$Lu = \Delta_2^n u + \sum_{\nu=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n-l+\nu-\left[\frac{\nu}{2}\right]} \theta_{2(n-l-j)+\nu}\Delta_2^{l-\nu+j}u + Hu = 0, \tag{7}$$

cu Hu o formă diferențială de ordin $2n - l - 1$ cu coeficienți vectori contravarianți.

Coeficienții ecuației (7) se calculează cu ajutorul coeficienților ecuației (1) în condițiile (3) și cu ajutorul simbolurilor lui Christoffel de speța întîia și de speța a doua.

& 2. CONOIDUL CARACTERISTIC

Forma caracterisrică a ecuației pe care o studiem este multiplă de ordin de multiciplitate n. Suprafețele caracteristice sînt suprafețele care verifică ecuația cu derivate parțiale

$$P(x^\alpha, \pi_\beta) = g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta = 0.$$

Cantitățile $\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}$ sînt parametrii directori ai transversalei la $G = 0$; cum varietatea $G = 0$ este o caracteristică, această rransversală — care este direcția generatoarei de contact între planul tangent la suprafață, de componente $(\pi_1, \dots, \pi_m)$, și conul caracreristic în punctul (x^α) — va fi tangentă în punctul (x^α) suprafeței $G = 0$. Rezultă că curbele integrale ale sistemului

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}} = dt$$

sînt situate în întregime pe suprafaţa G. Aceste curbe sînt însăşi curbele caracteristice ale ecuaşiei $P = 0$ şi ecuaţiile lor sînt

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}} = -\frac{d\pi_\beta}{\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x^\beta}} = dt.$$

J. Hadamard a numit aceste curbe bicaracteristice, aceste curbe determinîndu-se fără a cunoaşte suprafeţele caracteristice.

Locul bicaracteristicelor ce trec prin acelaşi punct $M(a^\alpha)$ este o suprafaţă caracterisică a ecuaţiei, cu punct conic în $M(a^\alpha)$, numită *conoid caracteristic*.

J. Hadamard a demonstrat că bicaracteristicele pot fi interpretate ca geodezicele de lungime nulă ale spaţiului Riemann asociat.

Dacă notăm cu s parametrul pe geodezicele duse din punctul $M(a^\alpha)$, punctul M corespunzînd valorii $s = 0$, şi cu Γ pătratul geodezicei de la punctul $M(a^\alpha)$ la punctul $Q(x^\alpha)$ în metrica (4), atunci este îndeplinită relaţia

$$P\left(x^\alpha, \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\beta}\right) = 4\Gamma;$$

deci $\Gamma = 0$ este ecuaţia conoidului caracteristic.

În cele ce urmează, vom avea nevoie şi de relaţia

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha} = 4s\frac{dx^\alpha}{ds}.$$

N. Teodorescu [2] a demonstrat că, dacă se consideră două puncte infinit vecine din domeniul D şi conoizii caracteristici corespunzători, unul din ei rezultă din celălalt prin transportul paralel al lui Levi-Civita, care aduce vîrful primului conoid în vîrful celui de al doilea.

& 3. SOLUŢIA ELEMENTARĂ

Soluţia elementară a ecuaţiei (7) o vom căuta ca soluţie cu singularitate algebrică de-a lungul conoidului caracteristic de ecuaţie $\Gamma = 0$.

Dar între forma pătratică P şi membrul întîi al ecuaţiei conoidului caracterisric asociat punctului $M(a^\alpha)$ există relaţia

$$P = 4\Gamma.$$

Forma soluţiei va fi

$$u = v\Gamma. \tag{8}$$

Să ţinem seama de (8) în ecuaţia (7). Pentru a calcula mai uşor expresiile necesare, să facem notaţiile

$$
(9)\quad \begin{cases}
X_j^p(v) = 2\Delta(v,\ \Gamma) + v[\Delta_2\Gamma + 4(p-j)]; \quad j = 1,\ 2, \ldots \\
X_0(v) = \Delta_2 v \\
Y_{0,j}(v) = X_0^j(v) \text{ (operatorul } X_0 \text{ aplicat de } j \text{ ori)} \\
Y_{j,j}^p(v) = X_j^p X_{j-1}^p \ldots X_1^p(v); \quad j = 1,\ 2, \ldots \\
Y_{j-\alpha,j}^p(v) = X_{j-\alpha} Y_{j-\alpha-1,\,j-1}^p(v) + X_0 Y_{j-\alpha,\,j-1}^p(v); \ \alpha = 1, \ldots, j-1 \\
H_j^p = \Delta_2\Gamma + 4(p-j)
\end{cases}
$$

Prin recurenţă, se arată că

$$
(10)\qquad \Delta_2^j(v\Gamma^p) = \sum_{\alpha=0}^{j} p(p-1)\ldots(p-j+\alpha+1)\ \Gamma^{p-j+\alpha}\, Y_{j-\alpha,\,j}^p(v).
$$

Apoi

$$
(11)\quad \theta_s\Delta_2^j(v\Gamma^p) = \sum_{\alpha=0}^{j} p(p-1)\ldots(p-j+\alpha+1)\ \theta_s(\Gamma^{p-j+\alpha} Y_{j-\alpha,\,j}^p(v)).
$$

Ca şi în [1], obţinem

$$
(12)\qquad \theta_s(\varphi\Gamma^p) = \sum_{j=0}^{s} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)\ \Gamma^{\alpha-j} b_s^{i_1\ldots i_s} B_{j,s}(\varphi,\ \Gamma).
$$

Dacă expresia $b_s^{i_1\ldots i_s} B_{j,s}(\varphi,\ \Gamma)$ o ordonăm după derivatele funcţiei φ, obţinem

$$
(13)\qquad b_s^{i_1\ldots i_s} B_{j,s} = \sum_{k=0}^{s-j} \varphi_{i_1\ldots i_{s-k-j}}\, U_{k,\,j}(T_s) = W_j(\varphi,\ T_s)
$$

unde

$$
U_{k,j}(T_s) = \sum_{r_2=k+1}^{\beta_2} \ldots \sum_{r_{\tau-1}=k+\tau-2-r_2-\ldots-r_{\tau-2}}^{\beta_{\tau-1}} \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{j} > \ldots < \frac{1}{j-(\tau-2)} >.
$$

$$
\cdot \frac{j-(\tau-2)}{(s-k-j)!\, r_2!\ldots r_{\tau-1}!} \frac{\partial^{s-j+\tau-2} T_s}{\partial\pi i_1 \ldots \partial\pi i_{s-j+\tau-2}} \pi i_{s-k-j+1} \ldots i_{s-k-j+r_2} \ldots
$$

$$
\cdot \pi_{i_{s-j+\tau-r_{\tau-1}-1}\ldots i_{s-j+\tau-2}}
$$

cu $\beta_\tau = \left[\dfrac{r_1 - r_2 - \ldots - r_{\tau-1}}{j-\tau+2}\right]$, $r_1 = k+j$. Atunci avem

$$
(12')\qquad \theta_s(\varphi\Gamma^\alpha) = \sum_{f=0}^{s} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-f+1)\ \Gamma^{\alpha-f} W_f(\varphi,\ T_s).
$$

Pentru a scrie expresia operatorului $\theta_s \Delta_2^j(v\Gamma^p)$ din (11), folosim formula (12') unde înlocuim pe α cu $p - j + \alpha$ şi pe φ prin $Y_{j-\alpha,j}(v)$. Astfel, obţinem

$$\theta_s \Delta_2^j(v\Gamma^p) = \sum_{\alpha=0}^{j} \sum_{f=0}^{s} p(p-1) \dots (p-j+\alpha-f+$$

$$+ 1)\, \Gamma^{p-j+\alpha-f} W_f(Y_{j-\alpha,j}(v),\ T_s) \tag{14}$$

Pentru a calcula pe $H(v\Gamma^p)$, ţinem seama că

$$H(v\Gamma^p) = \sum_{k=0}^{2n-l-1} c_s^{i_1 \dots i_s} (v\Gamma^p)_{i_1 \dots i_s}$$

unde $c_s^{i_1 \dots i_s}$ sînt vectori contravarianţi, cărora le asociem formele multiliniare

$$C_s = c_s^{i_1 \dots i_s} \pi_{i_1} \dots \pi_{i_s}.$$

Se obţine ca şi mai sus,

$$H(v\Gamma^p) = \sum_{s=0}^{2n-l-1} \sum_{f=0}^{s} p(p-1) \dots (p-f+1)\ \Gamma^{p-f} W_f(v,\ C_s). \tag{15}$$

Înlocuind în ecuaţia (7) relaţiile (10 pentru $j = n$), (14 pentru $s = 2(n - l - j) + \nu$, $j = l - \nu + j$) şi (15), se obţine o relaţie ce poate fi ordonată după puterile lui Γ, prin intervertirea ordinei de sumare.

Astfel, în (15) observăm că domeniul de variaţie a lui s şi f este totalitatea punctelor de coordonate numere întregi din triunghiul OAB.
Dacă însumăm întîi după s, păstrînd pe f constant, s şi f variază în intervalele $f \leqslant s \leqslant 2n - l - 1$, respectiv $0 \leqslant f \leqslant 2n - l - 1$.

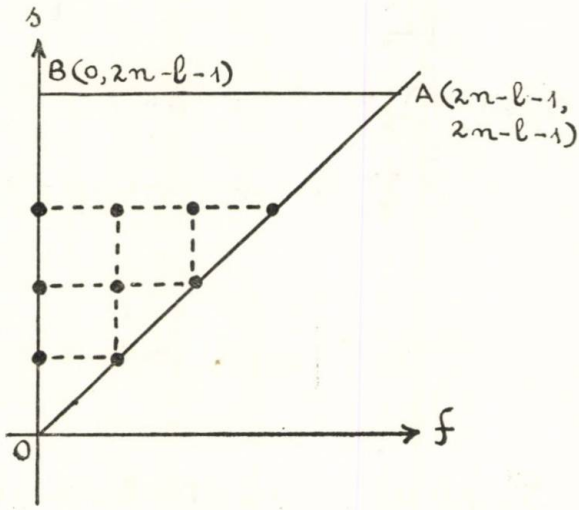


Fig. 1

Deci relația (15) se va scrie

$$(15') \qquad H(v\Gamma^p) = \sum_{f=0}^{2n-l-1} p(p-1)\dots(p-f+1)\Gamma^{p-f} \sum_{s=f}^{2n-l-1} W_f(v, C_s)$$

sau

$$(15'') \qquad H(v\Gamma^p) = \sum_{f=0}^{2n-l-1} p(p-1)\ \dots\ (p-f+1)\Gamma^{p-f} F_f(v)$$

cu

$$(16) \qquad F_f(v) = \sum_{s=f}^{2n-l-1} W_f(v, C_s).$$

În calculele necesare pentru intervertirea ordinei de sumare în expresia $\theta_s \Delta_2^j(v\Gamma^p)$ se face distincție între cazul $s < j$ și $s \geqslant j$.

Introducînd operatorii

$$(17) \qquad Z^{j,1}_{\beta,s}(\varphi_\gamma) = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma=0}^{\beta} \varphi_\gamma, & \beta = 0, 1, \dots, s-1 \\ \sum\limits_{\gamma=\beta-s}^{\beta} \varphi_\gamma, & \beta = s, \dots, j \\ \sum\limits_{\gamma=\beta-s}^{j} \varphi_\gamma, & \beta = j+1, \dots, j+s \end{cases}$$

$$(18) \qquad Z^{j,2}_{\beta,s}(\varphi_\gamma) = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma=0}^{\beta} \varphi_\gamma, & \beta = 0, \dots, j-1 \\ \sum\limits_{\gamma=0}^{j} \varphi_\gamma, & \beta = j, \dots, s \\ \sum\limits_{\gamma=\beta-s}^{j} \varphi_\gamma, & \beta = s+1, \dots, j+s \end{cases}$$

și

$$(19) \qquad Z^j_{\beta,s}(\varphi_\gamma) = \begin{cases} Z^{j,1}_{\beta\ s} & s < j \\ Z^{j,1}_{\beta\ s} & s > j \end{cases}$$

vom obține

$$(20) \quad \theta_s \Delta_2^j(v\Gamma^p) = \sum_{\beta=0}^{j+s} p(p-1)\dots(p-\beta+1)\Gamma^{p-\beta} Z^j_{\beta,s}[W_{\beta-\gamma}(Y^p_{\gamma,j}(v), T_s)].$$

În ecuaţia (7) intervine expresia

$$\sum_{\nu=1}^{l} \sum_{k=1}^{n-l+v-\left[\frac{\nu}{2}\right]} \theta_{2(n-l-k)+\nu} \Delta_2^{l-\nu+k}(v\Gamma^p) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\alpha=j+n}^{n+\nu-\left[\frac{\nu}{2}\right]} \sum_{\beta=0}^{2n-\alpha} p(p-1)\dots(p-\beta+1)\Gamma^{p-\beta} Z_{\beta,\,2(n-\alpha)+\nu}^{\alpha-\nu}[W_{\beta-\gamma}(Y_{\gamma,\,\alpha-\nu}^{p}(v),$$

$$T_{2(n-\alpha)+\nu)}]$$

Să notăm prin

$$(21)\quad \Psi_{\beta,\,\nu}^{p}(v) = \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=l-1}^{n+\nu-\left[\frac{\nu}{2}\right]} Z_{\beta,\,2(n-\alpha)+\nu}^{\alpha-\nu}[W_{\beta-\gamma}(Y_{\gamma,\,\alpha-\nu}^{p}(v),\ T_{2(n-\alpha)+\nu)}],\ \beta=0,\dots,n-\nu+\left[\frac{\nu}{2}\right] \\ \sum\limits_{\alpha=l+1}^{2n-\beta} Z_{\beta,\,2(u-\alpha)+\nu}^{\alpha-\nu}[\dots]\ \beta = n-\nu+\left[\frac{\nu}{2}\right]+1,\dots,2n-l-1 \end{cases}$$

şi

$$(21')\qquad E_{\beta}^{p}(v) = \sum_{\nu=1}^{l} \Psi_{\beta,\,\nu}^{p}(v).$$

Atunci obţinem

$$\sum_{\nu=1}^{l} \sum_{k=1}^{n-l+\nu-\left[\frac{\nu}{2}\right]} \theta_{2(n-l-k)+\nu} \Delta_2^{l-\nu+k}(v\Gamma^p) = \sum_{\beta=0}^{2n-l-1} p(p-$$

$$(22)\qquad -1)\dots(p-\beta+1)\Gamma^{p-\beta} E_{\beta}^{p}(v)$$

Reunind rezultatele parţiale obţinute, ecuaţia (7), pentru $u = v\Gamma^p$, devine

$$(23)\qquad L(v\Gamma^p) = \sum_{k=0}^{2n-l-1} p(p-1)\dots(p-k+1)\Gamma^{p-k} V_k^p(v) = 0$$

cu

$$(24)\qquad V_k^p(v) = \begin{cases} Y_{k,\,n}^{p}(v) + E_k^p(v) + F_k(v); & k = 0, 1, \dots, n \\ E_k^p(v) + F_k(v); & k = n+1, \dots, 2n-l-1 \end{cases}$$

& 4. DETERMINAREA FUNCȚIEI v

Pentru ca $L(v\Gamma^p)$ să fie o funcție regulată de-a lungul suprafeței reprezentate de ecuația $\Gamma = 0$, trebuie să se anuleze coeficientul factorului $\Gamma^{p-2n+l+1}$ pentru $p \neq 0, 1, \ldots, 2n - l - 1$, adică

$$V^p_{2n-l-1}(v) = 0. \tag{25}$$

Să calculăm explicit toți termenii ce intervin în (25). Din (24) și (21') se observă că

$$V^p_{2n-l-1}(v) = E^p_{2n-l-1}(v) + F_{2n-l-1} = \sum_{\nu=1}^{l} \Psi^p_{2n-l-1,\nu} +$$

$$+ vU_{0,2n-l-1}(C_{2n-l-1}) = \sum_{\nu=1}^{l} Z^{l+1-\nu}_{2n-l-1,\,2(n-l-1)+\nu}[W_{2n-l-1-\gamma}(Y^p_{\gamma,\,l+1-\nu}(v),$$

$$T_{2(n-l-1)+\nu})] + vU_{0,2n-l-1}(C_{2n-l-1}).$$

Din relația (19), se constată că valoarea cantității $Z^j_{\beta,\,s}(\varphi_\gamma)$ diferă după relația de ordine dintre s și j; deci

$$V^p_{2n-l-1}(v) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{3(l+1)-2n}{2}\right]-1} Z^{l+1-\nu,\,1}_{2n-l-1,2(n-l-1)+\nu}[\ldots] + \tag{26}$$

$$+ \sum_{\nu=\left[\frac{3(l+1)-2n}{2}\right]}^{l} Z^{l+1-\nu,2}_{2n-l-1,2(n-l-1)+\nu}[\ldots] + vU_{0,2n-l-1}(C_{2n-l-1}).$$

Dar atît $Z^{j,\,1}_{\beta,\,s}$ cît și $Z^{j,\,2}_{\beta,\,s}$ au diverse determinări, după relația de ordine dintre j și β. Or, pentru $Z^{l+1-\nu,1}_{2n-l-1,\,2(n-l-1)+\nu}$ găsim $\beta = 2n - l - 1, j = l + 1 - \nu, s = 2(n - l - 1) + \nu$; de unde $\beta \geqslant j$, $\beta > s$ cu $j > s$. Deci, în (26), $Z^{j,\,1}_{\beta,\,s}[\ldots]$ intervine prin a treia determinare din (18). Aceleași considerente ne arată că $Z^{j,\,2}_{\beta,\,s}[\ldots]$ intervine tot prin a treia determinare, dată de relația (19). Atunci, rezultă

$$V^p_{2n-l-1}(v) = \sum_{\nu=1}^{l} W_{2(n-j-1)+\nu}(Y^p_{l+1-\nu,\,l+1-\nu}(v),\ T_{2(n-l-1)+\nu}) +$$

$$+ vU_{0,2-l-1}(C_{2n-l-1})$$

sau, ținînd seama de (13), condiția (25) devine *

$$V^p_{2n-l-1}(v) = \sum_{\nu-1}^{l} (Y^p_{l+1-\nu,\,l+1-\nu}(v))\, T_{2(n-l-1)+\nu} + vT_{2n-l-1} = 0. \tag{27}$$

---

* Pentru simetrie înlocuiesc pe C_{2n-l-1} prin T_{2n-l-1}.

Prin recurenţă, se demonstrează (cu notaţiile din (9)) că

$$Y^p_{j,j}(v) = X^p_j \dots X^p_1(v) = \sum_{k=0}^{j} 2^{j-k}\Phi_{j-k}(v)\, L^{j,p}_k,\ L^j_0 = 1 \tag{28}$$

cu

$$\Phi_j(v) = \Delta(\Gamma,\ \varphi_{j-1}(v)),\ \Phi_0(v) = v \tag{29}$$

şi

$$\begin{cases} L^{j,p}_k = \sum\limits_{j_k=k}^{j} \sum\limits_{j_{k-1}=k-1}^{j_k-1} \dots \sum\limits_{j_1=1}^{j_2-1} X^p_{j_k} X^p_{j_{k-1}} \dots X^p_{j_2} X^p_{j_1}\ ;\ k = 1, \dots, j \\ L^{j,p}_0 = 1 \end{cases} \tag{30}$$

Funcţia v intervine numai prin intermediul operatorului $\Phi_j(v)$.

Dacă notăm prin s parametrul de-a lungul bicaracteristicelor ecuaţiei date, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha} = 4s\,\frac{dx^\alpha}{ds}$$

şi

$$\Phi_1(v) = \Delta(\Gamma, v) = 2s\,\frac{dv}{ds}. \tag{31}$$

Prin recurenţă, se demonstrează că

$$\Phi_k(v) = 2^k \sum_{j=1}^{k} s^j \frac{d^j v}{ds^j}\,\alpha^j_k = 2^k \sum_{j=1}^{k} s^j v^{(j)} \alpha^j_k \tag{32}$$

cu

$$\begin{cases} \alpha^j_k = \sum\limits_{\substack{m_1, \dots, m_{k-j}=0 \\ m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_{k-j}}}^{j-1} (j - m_1) \dots (j - m_{k-j})\ ;\quad j = 2, \dots, k-1 \\ \alpha^1_k = \alpha^k_k = 1 \end{cases} \tag{32'}$$

Deci

$$Y^p_{j,j}(v) = \sum_{i=1}^{j} s^i v^{(i)} \sum_{k=1}^{j} 2^{2k} L^{j,p}_{j-k} \alpha^i_k + v L^{j,p}_j. \tag{33}$$

Atunci ecuaţia (27) se scrie

$$V^p_{2n-l-1}(v) = \sum_{\nu=1}^{l} \Bigg[\sum_{j=1}^{l+1-\nu} s^j v^{(j)} \sum_{k=j}^{l+1-\nu} 2^{2k} L^{l+1-\nu,p}_{l+1-\nu-k} \alpha^j_k +$$

$$+ v L^{l+1-\nu,p}_{l+1-\nu} \Bigg] T_{2(n-l-1)+\nu} + v T_{2n-l-1} = 0$$

sau, ordonînd după ordinul de derivare a funcției v, în domeniul în care $T_{2n-2l-1} \neq 0$, obținem

$$(34) \qquad 2^{2l}s^l v^{(l)} + \sum_{j=1}^{l-1} s^j v^{(j)} \left\{ \sum_{j=k}^{l} 2^{2k} \alpha_k^j L_{l-k}^{l,\,p} + \sum_{\nu=2}^{l+1-k} L_{l+1-\nu-k}^{l+1-\nu,\,p} \frac{T_{2(n-l-1)+\nu}}{T_{2n+2l-1}} + \right.$$

$$\left. + v \left[L_l^{l,\,p} + \sum_{\nu=2}^{l+1} L_{l+1-\nu}^{l+1-\nu,\,p} \frac{T_{2(n-l-1)+\nu}}{T_{2n-2l-l}} \right] = 0.$$

Ecuația (34) este o ecuație diferențială de ordinul l, de tip Fuchs în jurul originii, deoarece

$$(35) \qquad L_k^{l,\,p} = \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_k = 1 \\ j_1 < \ldots < j_k}}^{l} 2^k [m + 2(p - j_1)] \ldots [m + 2(p - j_k)] + sD_k(s),$$

cu $D_k(s)$ funcție olomorfă în s, rapoartele formelor multiliniare $\dfrac{T_{2(n-l-1)+\nu}}{T_{2n-2l-1}}$ fiind de asemenea funcții olimorfe, de ordinul $\nu - 1$ în s.

Intervenția ecuațiilor de tip Fuchs în determinarea soluțiilor elementare a fost pusă în evidență pentru prima dată de *N. Teodorescu* [3].

Rezolvarea ecuației (34). Ecuația determinantă a ecuației diferențiale (34) este

$$(36) \qquad \sum_{\alpha=0}^{l-1} \rho(\rho - 1) \ldots (\rho - l + \alpha + 1)\, a_0^{l-\alpha} + a_0^0 = 0$$

cu

$$(37) \qquad \begin{cases} a_0^l = 1 \\ a_0^{l-\alpha} = \text{termen liber din} \left\{ \displaystyle\sum_{k=l-\alpha}^{l} 2^{2(k-l)} L_{l-k}^{l,\,p} \alpha_k^{l-\alpha} \right\} \\ a_0^0 = \text{termen liber din } \{2^{-2l} L_l^{l,\,p}\} \end{cases}$$

Dar, ținînd seama de (35) și notînd

$$\rho_1 = -\frac{m + 2(p-1)}{2},$$

avem

$$(37') \qquad \begin{cases} a_0^0 = (-1)^l \rho_1(\rho_1 + 1) \ldots (\rho_1 + l - 1) \\ a_0^{l-\alpha} \displaystyle\sum_{k=l-\alpha}^{l-1} \alpha_k^{l-\alpha} \bar{L}_{l-k}^{l,\,p} + \alpha_l^{l-\alpha} \end{cases}$$

cu

$$\bar{L}_{l-k}^{l,p} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{l-k}=1 \\ j_1<\dots<j_{l-k}}}^{l} (-1)^{l-k}(\rho_1 + j_1 - 1)\dots(\rho_1 + j_{l-k} - 1).$$

Ordonînd ecuaţia determinantă după puterile lui ρ, obţinem

$$\sum_{\beta=0}^{l-1} \rho^{l-\beta} \sum_{\alpha=0}^{\beta} a_0^{l-\alpha}(-1)^{\beta-\alpha}\beta_{\beta-\alpha}^{l-\alpha} + a_0^0 = 0 \tag{38}$$

cu

$$\beta_\delta^{l-\beta} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_\delta=1 \\ i_1<\dots<i_\delta}}^{l-\alpha-1} i_1 \dots i_\delta, & \delta = 1, \dots, l-\alpha-1. \\ 1, & \delta = 0 \end{cases}$$

Prin recurenţă, se poate arăta

$$\alpha_{l-\beta+s}^{l-\beta} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \alpha_{l-\beta+s-j}^{l-\beta}\beta_j^{l-\beta+s}.$$

Să calculăm efectiv coeficientul puterii $l-\beta$ a lui ρ din (38). Avem

$$C_\beta \sum_{\alpha=0}^{\beta}(-1)^{\beta-\alpha}\beta_{\beta-\alpha}^{l-\alpha} \sum_{k=l-\alpha}^{l} \alpha_k^{l-\alpha}\bar{L}_{l-k}^{l,p} \tag{39}$$

şi

$$\bar{L}_0^l = 1, \quad \alpha_{l-\alpha}^{l-\alpha} = 1, \quad \beta_0^{l-\alpha} = 1,$$

sau, reordonînd (39) după $\bar{L}_{l-k}^{l,p}$ prin schimbarea ordinei de sumare,

$$C_\beta = \sum_{k=l-\alpha+1}^{l} \bar{L}_{l-k}^{l,p} D_k^\beta + \bar{L}_\beta^{l,p} \tag{39'}$$

cu

$$D_k^\beta = \alpha_k^{l-\beta} + \sum_{\alpha=l-k}^{\beta-1} (-1)^{\beta-\alpha}\beta_{\beta-\alpha}^{l-\alpha}\alpha_k^{l-\alpha}.$$

Să demonstrăm, prin recurenţă, că

$$D_k^\beta = 0 \quad \text{pentru } k = l-\beta+1, \dots, l. \tag{40}$$

Or, pentru $k = l-\beta+1$, avem

$$D_{l-\beta+1}^\beta = \alpha_{l-\beta+1}^{l-\beta} - \beta_1^{j-\beta+1} = 0,$$

deoarece

$$\alpha_{l-\beta+1}^{l-\beta} = \beta_1^{l-\beta+1}. \text{ Dar } \alpha_k^j = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{k-j}=1 \\ n_1 \leqslant \dots \leqslant n_{k-j}}}^{j} n_1 \dots n_{k-j}, \quad \beta_\delta^k =$$

$$= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_\delta = 1 \\ i_1 < \dots < i_\delta}}^{k=1} i_1 \dots i_\delta \text{ deci are loc relaţia}$$

$$\beta_j^{k+j} = \sum_{\alpha+1}^{j} (-1)^{\alpha-1} \beta_{j-\alpha}^{k+j-\alpha} \alpha_{k+j}^{k+j-\alpha}. \tag{41}$$

Atunci

$$D_k^\beta = (-1)^{\beta-l+k} \left[\sum_{s-1}^{\beta-l+k} (-1)^{s+1} \beta_{\beta-l+k-s}^{k-s} \alpha_k^{k-s} + \sum_{\alpha=l-k+1}^{\beta} (-1)^{l-k-\alpha} \beta_{\beta-\alpha}^{l-\alpha} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \alpha_k^{l-\alpha} \right] = (-1)^{\beta-l+k} \left[\sum_{s=1}^{\beta-l+k} (-1)^{s+1} \beta_{\beta-l+k-s}^{k-s} \alpha_k^{k-s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{\beta-l+k} (-1)^t \beta_{\beta-l+k-t}^{k-t} \alpha_k^{k-t} \right] = 0$$

Deci, din (39') ,deducem

$$C_\beta = \bar{L}_\beta^{l,p}. \tag{42}$$

Ţinînd seama de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi pentru ecuaţia (38) şi de valoafea $\bar{L}_\beta^l$ din (37'), rezultă că ecuaţia determinantă a ecuaţiei diferenţiale de tip Fuchs (34), în jurul originii, are rădăcinile

$$\rho_j = \rho_1 + j = -\frac{m + 2(p-1)}{2} + j; \; j = 0, 1, \dots, l-1. \tag{43}$$

Cum diferenţa între două rădăcini ale ecuaţiei determinante este un număr întreg şi cum căutăm pentru (34) o integrală regulată şi diferită de zero pentru $s = 0$, rezultă că această integrală corespunde valorii

$$\rho_{l-1} = 0;$$

de unde determinăm valoarea exponentului p:

$$p = -\frac{m}{2} + l. \tag{44}$$

În consecinţă, ecuaţia cu derivate parţiale (7) are soluţia elementară (cu singularitate algebrică) de forma

$$u = v \, \Gamma^{-\frac{m}{2}+l}$$

funcţia v fiind regulată de-a lungul conoidului caracteristic şi determinată de ecuaţia diferenţială (34) de ordin l.

& 5. DETERMINAREA FUCŢIEI $\overset{1}{v}$

Funcţia $v(s)$ determinată în §4, pe care o vom nota $\overset{0}{v}(s)$, este cunoscută doar de-a lungul conoidului caracteristic $\Gamma = 0$. Pentru determinarea funcţiei $v(s)$ şi în puncte ce nu aparţin conoidului caracteristic, vom căuta funcţia v de forma

$$v = \overset{0}{v} + \overset{1}{v}\Gamma, \tag{45}$$

astfel încît, pentru $\Gamma = 0$, $v(s)$ să coincidă cu integrala regulată a ecuaţiei (34) Funcţia v, fiind o funcţie de s, se determină împunînd condiţia ca

$$u = (\overset{0}{v} + \overset{1}{v}\Gamma)^{\Gamma^{-\frac{m}{2}+l}}$$

să satisfacă ecuaţia (7). Ştim însă, din (23), că

$$L(\mathrm{v}\Gamma^p) = \sum_{k=0}^{2n-j-1} p(p-1)\dots(p-k+1)\Gamma^{p-k}\mathrm{V}_k^p(\mathrm{v});$$

şi deci*

$$L(\overset{0}{v}\Gamma^p + \overset{1}{v}\Gamma^{p+1}) = \sum_{k=0}^{2n-l-1} p(p-1)\dots(p-k+1)\Gamma^{p-k}\mathrm{V}_{k,0}^p(\overset{0}{v}) + \tag{46}$$

$$+ \sum_{k=0}^{2n-l-1} (p+1)p\dots(p-k+2)\Gamma^{p+1-k}\mathrm{V}_{k,1}^{p+1}(\overset{1}{v}) = 0.$$

Dar

$$\mathrm{V}_{2n-l-1,0}^p(\overset{0}{v}) = 0 \text{ pentru } \Gamma = 0;$$

de unde, pentru regularitatea funcţiei (46) de-a lungul suprafeţei reprezentate de $\Gamma = 0$, e necesară anularea coeficientului puterii $p - 2n + l + 2$ a lui Γ, obţinînd pentru $\overset{1}{v}$ relaţia

$$V_{2n-l-1,1}^{p+1}(\overset{1}{v}) = -\frac{1}{p+1}V_{2n-l-2,0}^p(\overset{0}{v}), \tag{47}$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul l, ce tip Fuchs, în domeniul originii.

Vom combina ecuaţia (47) cu ecuaţia (34) în aşa fel încît să devină o ecuaţie în funcţia $\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}$. Ecuaţiile menţionate se scriu:

$$2^{2l}s^l\overset{0}{v}{}^{(l)} + \sum_{j=1}^{l} s^{l-j}\overset{0}{v}{}^{(l-j)}R_{l-j}^0 = 0, \tag{34'}$$

$$2^{2l}s^l\overset{1}{v}{}^{(l)} + \sum_{j=1}^{l} s^{l-j}\overset{1}{v}{}^{(l-j)}R_{l-j}^1 = -\frac{V_{2n-l-2,0}^p(\overset{0}{v})}{(p+1)\,T_{2n-2l-1}} = f_1, \tag{47'}$$

* Al doilea indice de la operatorul V corespunde indicelui funcţiei v.

unde

$$
(48)\quad \begin{cases} R^{r}_{l-j} = \sum\limits_{k=l-j}^{l} 2^{2k}\alpha_k^{l-j}\left[L_{l-k}^{l,\,p+r} + \sum\limits_{\nu=2}^{l+1-k} L_{l+1-\nu-k}^{l+1-\nu,\,p+r}\,\dfrac{T_{2(n-l-1)+\nu}}{T_{2n-2l-1}}\right] \\ (j = 1, \ldots, l-1) \\ R^{r}_{0} = L_{l}^{l,\,p+2} + \sum\limits_{\nu=2}^{l+1} L_{l+1-\nu}^{l+1-\nu,\,p+r}\,\dfrac{T_{2(n-l-1)+\nu}}{T_{2n-2l-1}} \end{cases}
$$

Înmulțim ecuația (34') cu $\dfrac{\overset{1}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{2}}}$ iar ecuația (47') cu $\dfrac{\overset{0}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{2}}}$, le scădem și obținem

$$
(49)\quad 2^{2l}s^{l}\,\frac{\overset{0}{v}\,\overset{1}{v}^{(l)} - \overset{1}{v}\,\overset{0}{v}^{(l)}}{\underset{v}{\overset{0}{2}}} + \sum_{j-1}^{l} s^{l-j}\left[\frac{\overset{0}{v}\,\overset{1}{v}^{(l-j)} - \overset{1}{v}\,\overset{0}{v}^{(l-j)}}{\underset{v}{\overset{0}{2}}}\,R^{1}_{l-j} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\overset{1}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\,\frac{\overset{0}{v}^{(l-j)}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\,(R^{1}_{l-j} - R^{0}_{l-j})\right] = \frac{f_1}{\overset{\circ}{v}}\,.
$$

Prin recurență, se pot demonstra relațiile

$$
(50)\quad R^{r}_{l-j} - R^{0}_{l-j} = \sum_{\alpha=1}^{j}(-1)^{\alpha+1}C^{\alpha}_{l-j+\alpha}(r+\alpha-1)\ldots(r+1)\,r\,R^{r}_{l-j+\alpha}
$$

și

$$
(51)\quad \left(s^{k+r-1}\,\frac{\overset{r}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\right)^{(k)} = s^{k+r-1}\left[\frac{\overset{r}{v}^{(k)}\,\overset{0}{v} - \overset{0}{v}^{(k)}\,\overset{r}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{2}}} - \sum_{z=1}^{k-1} C_k^{z}\,\frac{\overset{0}{v}^{(z)}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\left(\frac{\overset{r}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\right)^{(k-z)}\right] +
$$

$$
+ \sum_{k=0}^{k-1} C_k^{t}\left(\frac{\overset{r}{v}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\right)^{(t)} s^{r+t-1}(k+r-1)\ldots(r+t).
$$

Cu ajutorul lor, ecuația (49) se va scrie

$$
(52)\quad 2^{2l}\left\{(s^{l}\overset{1}{\psi})^{(l)} + s^{l}\sum_{z=1}^{l-1} C_l^{z}\,\frac{\overset{0}{v}^{(z)}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\,\overset{1}{\psi}^{(l-z)} - \sum_{t=0}^{l-1} C_l^{t}s^{t}\overset{1}{\psi}^{(t)}\,l\ldots(t+1)\right\} +
$$

$$
+ \sum_{j-1}^{l-2} R^{1}_{l-j}\left\{(s^{l-j}\overset{1}{\psi})^{(l-j)} + s^{(l-j)}\sum_{z=1}^{l-j-1} C_{l-j}^{z}\,\frac{\overset{0}{v}^{(z)}}{\overset{\circ}{v}}\,\overset{1}{\psi}^{(l-j-z)} - \right.
$$

$$
\left. - \sum_{t=0}^{l-j-1} C_{l-j}^{t}\,\overset{1}{\psi}^{(t)}s^{t}(l-j)\ldots(t+1)\right\} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{l-1}\overset{1}{\psi}\,\frac{\overset{0}{v}^{(l-j)}}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\sum_{\alpha=1}^{j}(-1)^{\alpha+1}C^{\alpha}_{l-j+\alpha}\alpha!\,R^{1}_{l-j+\alpha} +
$$

$$
+ \overset{1}{\psi}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\alpha!\,R^{1}_{\alpha} = \frac{f_1}{\underset{v}{\overset{0}{}}}\,,
$$

unde s-a notat $\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}} = \overset{1}{\psi}$. Folosind relaţia

$$s^{r+t-1}\psi^{(t)} = \sum_{\beta=0}^{t} (-1)^{t-\beta}(s^{r+\beta-1}\psi)^{(\beta)}C_t^{\beta}(r+t-1)\dots(r+\beta)$$

în ecuaţia (52), (52), coeficientul funcţiei $\overset{1}{\psi}$ se reduce la

$$-\sum_{\alpha=2}^{l} R_\alpha^1 \alpha \dots 2.1. \sum_{t=0}^{\alpha} C_\alpha^t(-1)^t -$$

$$-2^{2l}r(r+1)\dots.(r+l-1)\sum_{t=0}^{l}(-1)^t C_l^t = 0,$$

deoarece

$$\sum_{t=0}^{\alpha} C_\alpha^t(-1)^t = (1-1)^\alpha = 0$$

Rezultă că ecuaţia diferenţială (52) nu conţine funcţia necunoscută $\overset{1}{\psi}$, deci admite reducerea ordinului cu o unitate.

Să notăm

$$s\overset{1}{\psi} = \overset{1}{\varphi}.$$

Ecuaţia diferenţială (52) poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{\beta=1}^{l} (s^{\beta-1}\overset{1}{\varphi})^{(\beta)}S_\beta^1 = \frac{f_1}{\overset{0}{v}}, \tag{53}$$

unde

$$S_l^r = R_l^r,$$

$$S_\beta^r = R_\beta^r + R_l^r \sum_{\alpha=\beta}^{l-1} s^{l-\alpha}\frac{\overset{0}{v}{}^{(l-\alpha)}}{\overset{0}{v}} C_l^\alpha \mathrm{d}_{\beta,r}^\alpha +$$

$$+\sum_{\alpha=\beta+1}^{l-1} s^{l-\alpha}\frac{\overset{0}{v}{}^{(l-\alpha)}}{\overset{0}{v}} \sum_{\gamma=l-\alpha+\beta}^{l-1} C_\gamma^{l-\alpha}R_\gamma^r \mathrm{d}_{\beta,r}^{\alpha-l+\gamma} - R_l^r\sum_{t=\beta}^{l-1}\mathrm{d}_{\beta,r}^t\mathrm{d}_{t,r}^l(-1)^{l-t} -$$

$$-\sum_{\alpha=\beta+1}^{l-1} R_\alpha^r \sum_{t=\beta}^{\alpha-1}\mathrm{d}_{\beta,r}\mathrm{d}_{t,r}^\alpha(-1)^{\alpha-t},$$

cu

$$\mathrm{d}_{\beta,r}^t = \begin{cases} (-1)^{t-\beta}C_t^\beta(r+t-1)\dots(r+\beta); & \beta = 0, 1, \dots, t-1. \\ 1; & \beta = t \end{cases}$$

Ţinînd seama de faptul că

$$(s^{\beta-1}\varphi)^{(\beta)} = \sum_{i=1}^{l} C_\beta^i(\beta-1)(\beta-2)\dots i\, s^{i-1}\varphi^{(i)},$$

ecuaţia (53) devine

$$\sum_{i=1}^{l} s^{i-1}\overset{1}{\varphi}{}^{(i)} \sum_{\beta=i}^{l} C_\beta^i(\beta-1)\dots i\, S_\beta^1 = \sum_{i=1}^{l} s^{i-1}\overset{1}{\varphi}{}^{(i)}\mathcal{S}_i^1 = \frac{f_1}{\overset{0}{v}}. \tag{54}$$

Calculul coeficienţilor $\mathcal{S}_i^1$. Să ordonăm coeficienţii $\mathcal{S}_i^1$ după cantităţile R_β^1 şi $s^{l-\beta}\dfrac{\overset{0}{v}{}^{(l-\beta)}}{\overset{0}{v}}$; găsim

$$\mathcal{S}_i^1 = \sum_{j=0}^{l-i} R_{i+j}^1\mathcal{N}_j^1 + \sum_{j=0}^{l-i-1} s^{l-i-j}\frac{\overset{0}{v}{}^{(l-i-j)}}{\overset{0}{v}}\mathcal{M}_j^1 \tag{55}$$

cu

$$\begin{cases} \mathcal{N}_j^r = C_{i+j}^i(i+j-1)\dots i - \sum\limits_{\beta=i}^{i+j-1} C_\beta^i(\beta- \\ -1)\dots i \sum\limits_{t=\beta}^{i+j-1} \mathrm{d}_{\beta,r}^t \mathrm{d}_{t,r}^{i+j}(-1)^{i+j-t}(j=1,\dots,l-i) \\ \mathcal{N}_0^r = 1 \\ \mathcal{M}_j^r = C_{i+j}^i(i+j-1)\dots i\, C_l^{i+j}R_l^r + \sum\limits_{\beta=i}^{i+j-1} C_\beta^i(\beta- \\ -1)\dots i \sum\limits_{\gamma=l+\beta-i-j}^{l} C_\gamma^{l-i-j}\cdot R_\gamma^r \mathrm{d}_{\beta,r}^{i+j-l+\gamma};\, j=1,\dots,l-i-1 \\ \mathcal{M}_0^r = C_l^i R_l^r \end{cases} \tag{56}$$

Folosind relaţiile

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0}^{j-1}(-1)^\alpha\dfrac{1}{\alpha!(j-\alpha)!} = \begin{cases} \dfrac{1}{j!} & \text{pentru } j \text{ impar} \\ -\dfrac{1}{j!} & \text{pentru } j \text{ par} \end{cases} \\ (r+i+l)\dots(r+i+j-1) = \sum\limits_{s=0}^{j-l} C_{j-l}^s(i+l+s-)\dots\ i+ \\ +l)(r+j-l-s-1)\dots.(r+1)\,r \end{cases} \tag{57}$$

se arată că

$$(56') \quad \begin{cases} \mathcal{N}_j^r = (-1)^j C_{i+j}^i (r+j-1) \dots (r+1)\, r \\ \mathcal{M}_j^r = C_{l-j}^i \sum\limits_{\gamma=l-j}^{l} (-1)^{j-l+\gamma} R_\gamma^r C_\gamma^{l-j} (r+j-l+\gamma-1) \dots (r+1)\, r \end{cases}$$

Ţinînd seama de relaţia (50), rezultă

$$(55') \qquad \mathcal{S}_i^1 = R_i^0 + \sum_{j=0}^{l-i-1} s^{l-i-j} \frac{\overset{0}{v}{}^{(l-i-j)}}{\overset{0}{v}} C_{l-j}^i R_{l-j}^0 .$$

& 6. REDUCEREA ORDINULUI ECUAŢIEI (54)

Ecuaţia diferenţială (54) îşi reduce ordinul cu o unitate prin schimbarea de funcţie $\overset{1}{\varphi}{}' = z_1$; obţinem

$$(58) \qquad \sum_{i=0}^{l-1} s^i z_1^{(i)} \mathcal{S}_{i+1}^1 = \frac{\overset{1}{f}}{\overset{0}{v}} .$$

De asemenea, putem reduce ordinul ecuaţiei (58) prin schimbarea de funcţie

$$(59) \qquad z_1 = \alpha_1(s)\, w_1,$$

unde funcţia $\alpha_1(s)$ este o integrală particulară a ecuaţiei omogene de tip Fuchs, în domeniul originii,

$$(60) \qquad \sum_{i=0}^{l-1} s^i \alpha_1^{(i)} \mathcal{S}_{i+1}^1(s) = 0,$$

asociată ecuaţiei (58). Ecuaţia determinantă corespunzătoare ecuaţiei (60) este

$$(60') \qquad \sum_{\alpha=0}^{l-1} \rho(\alpha\rho - 1) \dots (\rho - l + \alpha + 2)\, s^{l-\alpha} = 0,$$

cu $s_0^{l-\alpha}$ termenul liber al funcţiei $2^{-2l} \mathcal{S}_{l-\alpha}^1$ $(\alpha = 1, \dots, l-1)$ şi $s_0^l = 1$.

Din relaţia (55') se vede că $s_0^{l-\alpha}$ este egal cu termenul liber al funcţiei $2^{-2l} R_{l-\alpha}^0$, deoarece termenii următori sînt de ordin cel puţin 1 în variabila s. Dar valorile $s_0^{l-\alpha}$ sînt egale cu valorile $a_0^{l-\alpha}$ date de (37), calculate însă pentru $p = -\frac{m}{2} + l$, deci pentru $\rho_1 = 1 - l$. Pentru determinarea rădăcinilor ecuaţiei (60') ne folosim de ecuaţia (36) calculată pentru $\rho_1 = 1 - l$. Or, în acest caz, rădăcinile ecuaţiei (36) sînt

$$\rho = 0, -1, \dots, -(l-1);$$

deci $a_0^0 = s_0^0 = 0$. Atunci ecuaţia (36), pentru $\rho_1 = 1 - l$, se scrie

$$(36') \qquad \rho \sum_{\alpha=0}^{l-1} (\rho - 1) \dots (\rho - l + \alpha + 1)\, s_0^{l-\alpha} = 0.$$

Ecuaţia determinantă (60'), în care efectuăm schimbarea de variabilă $\rho + 1 = t$, devine

$$(60'') \qquad \sum_{\alpha=0}^{l-1} (t-1)(t-2)\dots(t-l+\alpha+1)\, s_0^{l-\alpha} = 0,$$

fiind însăşi factorul ce înmulţeşte pe ρ în (36'); deci ecuaţia (60'') are rădăcinile $t = -1, -2, \dots, -(l-1)$ iar ecuaţia determinantă (60') are rădăcinile $\rho = -2, -3, \dots, -l$.

Alegem drept funcţie $\alpha_1(s)$ integrala ecuaţiei (60) ce nu conţine termen logaritmic, integrală ce corespunde rădăcinii $\rho = -2$. Astfel

$$(61) \qquad \alpha_1(s) = s^{-2}\eta_1(s),$$

cu $\eta_1(s)$ o funcţie olomorfă, diferită de zero pentru $s = 0$. Schimbarea de funcţie (59) introdusă în ecuaţia (58) ne conduce la ecuaţia diferenţială

$$(62) \qquad \sum_{j=1}^{l-1} w_1^{(j)} \sum_{i=j}^{l-1} s^i C_i^j \alpha_1^{(i-j)} \mathcal{S}_{i+1}^1 = \frac{f_1}{\underset{v}{0}},$$

ecuaţie ce devine de ordinul $l-2$ prin notaţia $w_1' = z_2$; adică

$$(62') \qquad \sum_{j=0}^{l-2} z_2^{(j)} \sum_{i=j+1}^{l-1} s^i C_i^{j+1} \alpha_1^{(i-j-1)} \mathcal{S}_{i+1}^1 = \frac{f_1}{\underset{v}{0}}.$$

Dar $\alpha_1^{(i-j-1)}$ este de ordinul $j-i-1$ în s; deci coeficienţii termenilor $z_1^{(j)}$ sînt de ordinul $j-1$ în s. Înmulţim întreaga ecuaţie cu s şi obţinem ecuaţia de tip Fuchs, în domeniul originii,

$$(62'') \qquad \sum_{j=0}^{l-2} z_2^{(j)} \mathcal{S}_j^2 = \frac{f_1}{\underset{v}{0}}\, s,$$

cu

$$(63) \qquad \mathcal{S}_j^2 = \sum_{i=0}^{i-j-2} s^{i+j+2} C_{i+j+1}^i \alpha_1^{(i)} \mathcal{S}_{i+j+2}^1.$$

În ecuaţia (62'') efectuăm din nou schimbarea de funcţie

$$z_2 = \alpha_2(s)\, w_2,$$

cu $\alpha_2(s)$ integrală a ecuaţiei omogene asociată ecuaţiei (62''). Ecuaţia determinantă corespunzătoare este

$$(64) \qquad \sum_{\alpha=0}^{l-2} \rho(\rho-1)\dots(\rho-l+\alpha+3)\, s_0^{l-\alpha-2,2} = 0$$

$$\text{cu} \begin{cases} s_0^{l-2,2} = 1 \\ s_0^{l-\alpha-2,2} = \text{coef. } s^{-\alpha} \text{ din } \dfrac{\mathcal{S}_{l-\alpha-2}^2}{\mathcal{S}_{l-2}^2} (\alpha = 1, \dots, l-2). \end{cases}$$

Ţinînd seama de relaţia (63), rezultă

$$s_0^{l-\alpha-2,2} = \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i (i+1)!\, C_{i+l-\alpha-1}^{i}\, s_0^{l-\alpha+i}$$

şi ecuaţia determinantă (64) se scrie, după schimbări de indici,

$$(64') \quad \sum_{\alpha=2}^{l-2} s_0^{l-\alpha} \sum_{k=0}^{l-\alpha-2} (-1)^k (k+1)!\, C_{l-\alpha-1}^{k} \rho(\rho-1)\dots(\rho-l+k+\alpha+3) = 0.$$

Pentru a determina rădăcinile ecuaţiei (64′) o vom compara cu ecuaţia (60′) ale cărei rădăcini sînt $\rho = -2, \dots, -l$. Să efectuăm în ecuaţia (60′) schimbarea de variabilă $\rho + 2 = t$. Obţinem

$$(60''') \qquad \sum_{\alpha=0}^{l-1} (t-2)\dots(t-l+\alpha)\, s_0^{l-\alpha} = 0,$$

cu rădăcinile $t = 0, \dots, -(l-2)$. Dar

$$(t-2)\dots(t-l+\alpha) = \sum_{k=0}^{l-\alpha-1} C_{l-k-\alpha}^{k} (-1)^k (k+1)!\, t(t-1)\dots(t-$$

$$-l+k+\alpha+2).$$

Atunci ecuaţia (60‴) se va scrie sub forma

$$t \sum_{\alpha=0}^{l-2} s_0^{l-\alpha} \sum_{k=0}^{l-\alpha-2} C_{l-\alpha-1}^{k} (-1)^k (k+1)!\, (t-1)\dots(t-l+k+\alpha+2) = 0$$

(termenul liber este nul). Atunci ecuaţia

$$(65) \quad \sum_{\alpha=0}^{l-2} s_0^{l-\alpha} \sum_{k=0}^{l-\alpha-2} C_{l-\alpha-1}^{k} (-1)^k (k+1)!\, (t-1)\dots(t-l+k+\alpha+2) = 0$$

are rădăcinile $t = -1, \dots, -(l-2)$.

Ecuaţia (65) este însăşi ecuaţia (64′) pentru $\rho + 1 = t$. Rezultă că ecuaţia (64′), deci ecuaţia determinantă (64) are rădăcinile

$$\rho = -2, \dots, -(l-1).$$

Astfel:

$$\alpha_2(s) = s^{-2}\eta_2(s).$$

Trecînd la funcţia w_2 indicată mai sus şi luînd $w_2' = z_3$, ecuaţia diferenţială (62″) se transformă în ecuaţia diferenţială de ordin $l-3$:

$$(66) \qquad \sum_{j=0}^{l-3} z_3^{(j)} \mathcal{S}_j^3 = \frac{f_1}{v} s^2,$$

cu

$$\mathcal{S}_j^3 = \sum_{i=0}^{l-j-3} s\, C_{i+j+1}^i\, \alpha_2^{(i)} \mathcal{S}_{i+j+1}^2 \text{ de ordin } j \text{ în s.}$$

Să demonstrăm *propoziția*:

Prin reduceri succesive ale ordinului ecuației (58) *se ajunge la ecuația diferențială de tip Fuchs, de ordin* $l - \gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, l)$:

$$\sum_{j=0}^{l-\gamma} z_\gamma^{(j)} \mathcal{S}_j^\gamma = \frac{f_1}{\substack{0\\v}} s^{\gamma-1}, \tag{67}$$

cu

$$\mathcal{S}_j^r = \sum_{i=0}^{l-j-\gamma} s\, C_{i+j+1}^i \alpha_{\gamma-1}^{(i)} \mathcal{S}_{i+j+1}^{\gamma-1}, \quad \alpha_{\gamma-1} = s^{-2}\eta_{\gamma-1}.$$

Ecuația determinantă a ecuației diferențiale omogene ce determină funcția $\alpha_{\gamma-1}$ *este*

$$\sum_{\alpha=0}^{l-\gamma+1} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-l+\gamma+\alpha)\, s_0^{l-\alpha-\gamma+1,\,\gamma-1} \tag{68}$$

și are rădăcinile $\rho = -2, \ldots, -(l-\gamma+2)$.

În adevăr, pentru $\gamma = 1, 2$, propoziția este adevărată.

Să presupunem acum că relația (67) este adevărată pentru γ și să arătăm că ecuația diferențială de ordin $l - \tau - 1$, ce se obține prin reducerea ordinului ecuației (67), este de aceeași formă cu ea. Pentru aceasta, să efectuăm în (67) schimbarea de funcție

$$z_\gamma = \alpha_\gamma w_\gamma.$$

Funcția α_γ se determină astfel încît noua ecuație în funcția necunoscută w_γ să nu conțină funcția w_γ. Atunci funcția α_γ este integrala ecuației omogene asociată ecuației (67), care este o ecuație de tip Fuchs în jurul originii (s = 0). Ecuația determinantă corespunzătoare este

$$\sum_{\alpha=0}^{l-\gamma} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-l+\alpha+\gamma+1)\, s_0^{l-\gamma-\alpha,\,\gamma} = 0 \tag{69}$$

$$\text{cu} \begin{cases} s_0^{l-\gamma-\alpha,\,\gamma} = \text{coef. } s^{-\alpha} \text{ din } \dfrac{\mathcal{S}_{l-\gamma-\alpha}^{\gamma}}{\mathcal{S}_{l-\gamma}^{\gamma}} \ (\alpha = 1, \ldots, l-\gamma) \\ s_0^{l-\gamma,\,\gamma} = 1 \end{cases}$$

Folosind faptul că se cunosc rădăcinile ecuației (68) și făcînd asupra ecuațiilor (68) și (69) aceleași raționamente ca cele făcute asupra ecuațiilor (60') și (64'), deducem că ecuația algebrică (69) are rădăcinile

$$\rho = -2, \ldots, -(l-\gamma+1),$$

deci $\alpha_\gamma = s^{-2}\eta_\gamma$. Înlocuind funcţia z_γ prin schimbarea de funcţie propusă şi notînd $w'_\gamma = z_{\gamma+1}$, obţinem ecuaţia

$$\sum_{j=0}^{l-\gamma-1} z_{\gamma+1}^{(j)} \mathcal{S}_j^{\gamma+1} = \frac{f_1}{\overset{0}{v}} s^\gamma \tag{70}$$

cu

$$\mathcal{S}_j^{\gamma+1} = \sum_{i=0}^{l-\gamma-j-1} s\, C_{i+j+1}^{i} \alpha_\gamma^{(i)} \mathcal{S}_{i+j+1}^{\gamma} \text{ de ordin } j \text{ în } s.$$

Or, ecuaţia (70) este o ecuaţie diferenţială de ordin $l - \gamma - 1$, ce se poate obţine din (67) pirn înlocuirea lui γ prin $\gamma + 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Rezultă că ecuaţia diferenţială (54), ce determină funcţia $\overset{1}{\varphi} = s\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}$, îşi reduce mereu ordinul, pînă ajungem la ecuaţia diferenţială de ordin 0, obţinută din (67) pentru $\gamma = l$;

$$z_l = \frac{f_1}{\mathcal{S}_0^l \overset{0}{v}} s^{l-1} \text{ cu } \mathcal{S}_0^l \text{ de ordin 0 în } s. \tag{71}$$

Dar $z_l = w'_{l-1}$, $w_{l-1} = \frac{z_{l-1}}{\alpha_{l-1}}, \ldots, z_{l-j} = w'_{l-j-1}, \ldots, z_1 = \left(s\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)'$ şi, revenind la funcţia necunoscută $\overset{1}{v}$, obţinem

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2\nu_{l-1}\frac{d}{ds}\left[s^2\nu_{l-2}\cdots\frac{d}{ds}s^2\left[\nu_1\frac{d}{ds}\left(s\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right]\right]\right\} = \frac{f_1}{\overset{0}{v}\mathcal{S}_0^l}s^{l-1} \tag{72}$$

cu

$$\nu_{l-j} = \frac{1}{\eta_{l-j}}$$

ecuaţie ce se integrează prin cuadraturi succesive.

& 7. DETERMINAREA FUNCŢIEI $\overset{r}{v}$

Se observă însă că nici funcţia

$$u = (\overset{0}{v} + \overset{1}{v}\Gamma)\,\Gamma^p,\ p = -\frac{m}{2} + l$$

nu satisface identic ecuaţia (7). Atunci, prin iterare, vom căuta soluţia ecuaţiei (7) sub forma

$$u = (\overset{0}{v} + \overset{1}{v}\,\Gamma \ldots + \overset{r}{v}\,\Gamma^r + \ldots)\,\Gamma^p.$$

Determinarea funcţiei $\overset{r}{v}$ se face în acelaşi mod ca şi determinarea funcţiei $\overset{1}{v}$. Astfel, încercăm o soluţie de forma

$$u = (\overset{0}{v} + \overset{1}{v}\Gamma + \dots + \overset{r}{v}\Gamma^r)\,\Gamma^p. \tag{73}$$

Introducînd în (7), vom avea

$$\begin{aligned} L(u) = &\sum_{h=0}^{2n-l-1} p(p-1)\dots(p-k+1)\,\Gamma^{p-k}V^p_{k,0}(\overset{0}{v}) + \\ &+ \sum_{k=0}^{2n-l-1} (p+1)p\dots(p-k+2)\,\Gamma^{p+1-k}\,V^{p+1}_{k,1}(\overset{1}{v}) + \dots + \\ &+ \sum_{k=0}^{2n-l-1} (p+r)(p+r-1)\dots(p+r-k+1)\,\Gamma^{p+r-k}V^{p+r}_{k,r}(\overset{r}{v}) = 0, \end{aligned} \tag{74}$$

unde presupunem, pentru $\Gamma = 0$:

$$\begin{cases} V^p_{2n-l-1,0}(\overset{0}{v}) = 0 \\ (p+1)\,V^{p+1}_{2n-l-1,1}(\overset{1}{v}) + V^p_{2n-l-2,0}(\overset{0}{v}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=0}^{2n-l-1} (p+r-1+j)\dots(p+r-2n+l+ \\ \quad + 1)\,V^{p+r-1-j}_{2n-l-j-1,r-1-j}(\overset{r-1-j}{v}) = 0. \end{cases} \tag{75}$$

În condiţiile (75), regularitatea funcţiei $L(u)$ dată de (74), de-a lungul suprafeţei $\Gamma = 0$, cere anularea coeficientului puterii $p - 2n + l + r + 1$ a lui Γ, deci funcţia $\overset{r}{v}$ trebuie să fie o soluţie a ecuaţiei

$$\sum_{j=0}^{2n-l-1} (p+r-j)\dots(p+r-2n+l+2)\,V^{p+r-j}_{2n-l-j-1,\,r-j}(\overset{r-1-j}{v}) = 0, \tag{76}$$

unde $V^{p+r-j}_{2n-l-j-1,\,r-j}(\overset{r-j}{v}) = 0$ pentru $j > r$.

În virtutea relaţiilor (24), (22), (16), ecuaţia (76) devine

$$2^{2l}s^l\overset{r}{v}{}^{(l)} + \sum_{j=1}^{l} s^{l-j}\overset{r}{v}{}^{(l-j)}R^r_{l-j} = f_r, \tag{76'}$$

unde R^r_{l-j} sînt date de (48) iar

$$f_r = -\sum_{j=1}^{2n-l-1} \frac{V^{p+r-j}_{2n-l-j-1,\,r-j}(\overset{r-j}{v})}{(p+r)\dots(p+r-j+1)\,T_{2n-2l-1}}.$$

Luînd în considerare sistemul format de ecuaţiile diferenţiale de tip Fuchs (76′) şi (34′) şi efectuînd calcule asemănătoare celor efectuate asupra sistemului (34′), (47′), obţinem pentru funcţia $s^r \frac{\overset{r}{v}}{\overset{0}{v}} = \overset{r}{\varphi}$ ecuaţia diferenţială

$$\sum_{i=1}^{l} s^{i-1} \overset{r}{\varphi}{}^{(i)} \mathcal{S}_i^1(s) = \frac{f_r}{\overset{0}{v}} s^{r-1}, \tag{77}$$

cu $\mathcal{S}_i^1(s)$ dată de (55′), care nu depinde de indicele r. În continuare, reducerea ordinului ecuaţiei diferenţiale (75) se efectuează identic cu reducerea ordinului ecuaţiei diferenţiale (54) şi va rezulta că funcţia $\overset{r}{v}$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{d}{ds}\left\{ s^2 \nu_{l-1} \frac{d}{ds}\left[s^2 \nu_{l-2} \cdots \frac{d}{ds}\left[s^2 \nu_1 \frac{d}{ds}\left(s^r \frac{\overset{r}{v}}{\overset{0}{v}} \right)\right]\right]\right\} = \frac{f_r}{\mathcal{S}_0^l \overset{0}{v}} s^{l+r-2}, \tag{78}$$

funcţiile ν_{l-j} şi $\mathcal{S}_0^l$ fiind aceleaşi cu cele ce intervin în ecuaţia (72).

Din relaţia (76′) se observă că determinarea funcţiilor $\overset{r}{v}$ pentru $r = 0, 1, \ldots$ se poate face numai în condiţia

$$p + r \neq 0, \; r = 1, \ldots, \tag{79}$$

adică

$$-\frac{m}{2} + l + r \neq 0 \quad \text{sau} \quad m = 2(l + r).$$

deci numai în cazul în care ecuaţia cu derivate parţiale (7) este considerată într-un spaţiu cu un număr impar de dimensiuni.

& 8. DEPENDENŢA FUNCŢIILOR $\overset{r}{v}$ DE PARAMETRUL s.

Funcţiile $\overset{r}{v}$, obţinute prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (78), nu mai sînt olomorfe în jurul originii. Pentru a cerceta modul în care depind de parametrul s, trebuie să evaluăm membrul doi al ecuaţiei (78).

Dependenţa de a s funcţiilor $V_k^p(\overset{0}{v})$. Din relaţiile (24) se vede că trebuiesc evaluate cantităţile $Y_{k,n}$, E_k şi F_k. Pentru aceasta, observăm că *

$$\frac{\partial^n \overset{0}{v}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} = s^{-(n-1)} K, \quad \pi_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^n \Gamma}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} = s^{-(u-2)} K,$$

$$U_{k,j}(T_s) = s^{j-k} K, \quad Y_{0,j}(\overset{0}{v}) = s^{-(2j-1)} K,$$

$$Y_{\alpha,n} = X_0^{n-\alpha} Y_{\alpha,\alpha} + \sum_{j=\alpha+1}^{n} X_0^{n-j} X_\alpha Y_{\alpha-1,j-1} = s^{-2n+2\alpha+1} K; \quad \alpha = 1, \ldots, n-1$$

$$Y_{n,n} = s^2 K, \quad E_k = s^{-2n+2k+2} K, \; F_k = s^{-2n+2k+l+1} K;$$

* Notez prin K o funcţie olomorfă, care diferă de la relaţie la relaţie.

deci

$$V_k(\overset{0}{v}) = \begin{cases} s^{-2n+2k+1} K & \text{pentru } k = 0, \dots, n-1 \\ s^{-2n+2k+2} K & \text{pentru } k = n, \dots, 2n-l-1 \end{cases} \tag{80}$$

Ordinul de dependenţă în s a funcţiei $\overset{1}{v}$ Funcţia $\overset{1}{v}$ este integrala ecuaţiei (72), unde $f_1 = -\dfrac{V^p_{2n-l-2,0}(\overset{0}{v})}{(p+)T_{2n-2l-1}}$ se comportă în origine ca s^{-1}. Ecuaţia (72) este

$$\frac{d}{ds}\left[s^2 \nu_{l-1} \frac{d}{ds}\left(\dots \frac{d}{ds}\left(s \frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right)\right] = s^{l-2} K,$$

care, după j integrări, devine

$$\frac{d}{ds}\left[s^2 \nu_{l-j} \frac{d}{ds}\left(\dots \frac{d}{ds}\left(s \frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right)\right] = s^{l-j-1} K. \tag{81}$$

Exponentul $l-j-1$ este pozitiv pentru $j \leqslant l-1$. Pentru $j = l-1$, relaţia (81) se reduce la

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 \nu_1 \frac{d}{ds}\left(s \frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right) = s^0 K;$$

de unde obţinem

$$\overset{1}{v} = (s^{-1} ln\, s) K. \tag{82}$$

Deci, funcţia $\overset{1}{v}$ se comportă în origine ca $s^{-1}\, ln\, s$; dar $\overset{1}{v}\,\Gamma$ se anulează în origine, deoarece $\lim\limits_{s \to 0}(s\, ln\, s) = 0$.

Ordinul de dependenţă în s al funcţiei $\overset{2}{v}$. În acest caz, termenul liber al ecuaţiei diferenţiale (78), pentru $r = 2$, este

$$f_2 = -\frac{1}{T_{2n-2l-1}}\left[\frac{V^{p+1}_{2n-l-2,1}(\overset{1}{v})}{(p+2)} + \frac{V^p_{2n-l-3,0}(\overset{0}{v})}{(p+2)(p+1)}\right]$$

Dar

$$V^{p+2}_{k,1}(\overset{1}{v}) \approx \begin{cases} s^{-2n+2k-1}\, ln\, s & \text{pentru } k = 0, \dots, n \\ s^{-2n-2k}\, ln\, s & \text{pentru } k = n+1, \dots, 2n-l-1 \end{cases} \tag{83}$$

Dacă presupunem $l \leqslant n-2$, atunci

$$V^{p+1}_{2n-l-2,1}(\overset{1}{v}) \approx s^{2(n-l-2)} ln\, s, \quad V^p_{2n-l-3,0}(\overset{0}{v}) \approx s^{2(n-l-2)};$$

de unde: ordinul minim prin care intervine s în funcţia f_2 este $s^3 \ln s$.

Rezolvînd ecuaţia (78) pentru $r = 2$, obţinem

$$\overset{2}{v} = s^{-3}\ln^2 s K.$$

De asemenea, funcţia $\overset{2}{v}$ Γ^2 se anulează în origine.

Ordinul de dependenţă în s a funcţiei $\overset{r}{v}$. Se determină în cazurile

a) $$2l \leqslant n - 1.$$

Să demonstrăm că

$$\overset{r}{v} = s^{-2k+1} \ln^r s\, K, \quad r \leqslant l. \tag{84}$$

Pentru aceasta, folosim principiul indusţiei complete. Formula (84) este demonstrată pentru $r = 1$ şi o presupunem verificată pentru $r = 1, \ldots, \alpha - 1$. Ţinînd seama de

$$V_{k,r}^{p+r}(\overset{r}{v}) \approx \begin{cases} s^{-2n+2k-2r+1} \ln^r s, & k = 0, \ldots, n \\ s^{-2n+2k-2r+2} \ln^r s, & k = n+1, \ldots, 2n-l-1 \end{cases} \tag{85}$$

termenul liber al ecuaţiei (78) pentru $r = \alpha$ este

$$f_\alpha = -\sum_{j=1}^{2n-l-1} \frac{V_{2n-l-j-1,\,\alpha-j}^{p+\alpha-j}\left(\overset{\alpha-j}{v}\right)}{(p+\alpha)\ldots(p+\alpha-j+1)\,T_{2n-2l-1}}.$$

Dar $V_{2n-l-j-1,\,\alpha-j}^{p+j}$ depinde de s în mod diferit, după cum indicele $2n - l - j - 1$ este mai mic sau mai mare decît n. Atunci, vom scrie funcţia f_α sub forma

$$f_\alpha = -\sum_{j=1}^{n-l-2} \frac{V_{2n-l-j-1,\alpha-j}^{p+\alpha-j}\left(\overset{\alpha-j}{v}\right)}{(p+\alpha)\ldots(p+\alpha-j+1)\,T_{2n-2l-1}} - \tag{86}$$

$$-\sum_{j=n-l-1}^{2n-l-1} \frac{V_{2n-l-j-1,\alpha-j}^{p+\alpha-j}\left(\overset{\alpha-j}{v}\right)}{(p+\alpha)\ldots(p+\alpha-j+1)\,T_{2n-2l-1}}.$$

În prima sumă: $n + 1 \leqslant 2n - l - j - 1 \leqslant 2n - l - 2$; în a doua sumă, indicele $2n - l - j - 1$ este cuprins între 0 şi n. Se vede că

$$\frac{V_{2n-j-l-1,\alpha-j}^{p+\alpha-j}\left(\overset{\alpha-j}{v}\right)}{T_{2n-2l-1}} \text{ se comportă ca } s^{-2\alpha+1}\ln^{\alpha-j} s \quad (j < \alpha),$$

$$\frac{V_{2n-l-\alpha-1,\,0}^{p}\left(\overset{0}{v}\right)}{T_{2n-2l-1}} = s^{-2\alpha+1} K;$$

deci

f_α se comportă în origine ca $s^{-2\alpha+1}\ln^{\alpha-1} s, (\alpha \leqslant n - l - 2)$ şi funcţia $\overset{\alpha}{v}$ este soluţia ecuaţiei

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2 \nu_{l-1} \frac{d}{ds}\left[\cdots \frac{d}{ds}\left(s^2 \nu_1 \frac{d}{ds}\left(s^\alpha \frac{\overset{\alpha}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right)\right]\right\} = s^{l-\alpha-1}\ln^{\alpha-1} s\, K_1. \tag{87}$$

Integrînd de j ori ecuația (87), obținem

$$(87') \qquad \frac{d}{ds}\left\{s^2\nu_{l-j}\frac{d}{ds}\left[\cdots\frac{d}{ds}\left(s^{\alpha}\frac{\overset{\alpha}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right]\right\} = s^{l-\alpha-j}\ln^{\alpha-1}s\,K_j.$$

Exponentul lui s din partea dreaptă este $\geqslant 0$ pentru $j \leqslant l-\alpha$, $1 \leqslant l - \alpha \leqslant l-1$. Dăm, în (87'), lui j valoarea $l-\alpha$ și obținem

$$(88) \qquad \overset{\alpha}{v} = s^{-2\alpha+1}\ln^{\alpha}s\;K \quad (\alpha \leqslant l-1).$$

În același mod se arată că $\overset{l}{v} = s^{-2l+1}\ln^l s\;K$.

Prin recurență se demonstrează că funcțiile $\overset{r}{v}$ pentru $l+1 < r \leqslant n - l - 1$ se comportă în origine ca $s^{-2n+1}\ln^l s$. Deci

$$(89) \qquad V^{p+r}_{k,r}(\overset{r}{v}) = \begin{cases} s^{-2n+2k-2r+1}\ln^l s; & k = 0, \ldots, n \\ s^{-2n+2k-2r+2}\ln^l s; & k = n+1, \ldots, 2n-l-1 \end{cases}$$

Funcția $\overset{n-l}{v}$ este soluția ecuației diferențiale (78) pentru $r = n-l$. Termenul liber al ecuației este

$$f_{n-l} = -\sum_{j=1}^{n-l-1}\frac{V^{p+n-l-j}_{2n-l-j-1,\,n-l-j}\left(\overset{n-l-j}{v}\right)}{(p+n-1)\ldots(p+n-l-j+1)\,T_{2n-2l-1}} - \frac{V^{p}_{n-1,0}\left(\overset{0}{v}\right)}{(p+1)\,T_{2n-2l-1}}.$$

Folosind relațiile (85) și (89), deducem

$$\frac{V^{p+n-l-j}_{2n-l-j-1,\,n-l-j}\left(\overset{n-l-j}{v}\right)}{T_{n_2-2l-1}} = \begin{cases} s^{-2n+2l+1}\ln^l s\;K; & 1 \leqslant j \leqslant n-2l-2 \\ s^{-2n+2l+1}\ln^{n-l-j}s\;K; & n-2l-1 \leqslant j \leqslant n-l-1 \end{cases}$$

$$V^{p+1}_{n}\left(\overset{1}{v}\right) = s^{-2n+2l}\ln s\,K,$$

$$V^{p}_{n-1,0}\left(\overset{0}{v}\right) = s^{-2n+2l}\,K;$$

de unde se vede că ordinul minim prin care intervine s în f_{n-l} este ordinul lui $s^{-2n+2l}\ln s$. În consecință, funcția $\overset{n-l}{v}$ satisface ecuația

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2\nu_{l-1}\frac{d}{ds}\left[\cdots\frac{d}{ds}\left(s^2\nu_1\frac{d}{ds}\left(s^{n-l}\frac{\overset{n-l}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right)\right]\right\} = s^{-n+2l-2}\ln s\,K$$

și se comportă în origine ca $s^{-2(n-l)}\ln s$.

Prin recurență, se arată că

$$\overset{r}{v} = \begin{cases} s^{-2r}\ln^{r-(n-l)+1}s\,K & \text{pentru } n-l \leqslant r \leqslant n-1 \\ s^{-2r}\ln^l s\,K & \text{pentru } r \geqslant n \end{cases}.$$

Dar produsul $\overset{r}{v}\,\Gamma^r$ devine infinit în origine pentru $r \geqslant n - l$; deci funcţia

$$v = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{v}\,\Gamma^r$$

nu este regulară în origine.

b) $$2l \geqslant n.$$

Prin recurenţă se demonstrează şi în acest caz că funcţiile $\overset{r}{v}$ pentru $r \geqslant n - l$ se comportă în origine ca $s^{-2r} \ln^{\alpha} s$, α fiind un număr întreg pozitiv, ce depinde de r, l, n. Ca şi la punctul a), se vede că funcţia $v = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{v}\,\Gamma^r$ nu este regulată în origine.

În concluzie, *condiţiile* (3) *sînt necesare pentru existenţa soluţiei elementare de forma dată* (8), *dar nu sînt şi suficiente*, deoarece funcţia $v(s)$ trebuie să fie regulată de-a lungul conoidului caracteristic, inclusiv vîrful ($s = 0$).

Capitolul II

DETERMINAREA SOLUŢIEI ELEMENTARE PENTRU O FORMĂ PARTICULARĂ A ECUAŢIEI (7).

Să particularizăm coeficienţii ecuaţiei (7) astfel încît funcţia $\overset{0}{v}$, integrala ecuaţiei (34), să fie de forma

(90) $$\overset{0}{v}(s) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i\, s^i.$$

Să determinăm coeficienţii a_i. Pentru aceasta, căutăm pentru ecuaţia (72') integrala de forma

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, s^i,$$

integrală ce există în virtutea teoremei lui Fuchs. Coeficientul a_0 rămîne arbitrar şi îl putem alege egal cu 1, iar coeficientul a_1 se obţine din relaţia

(11) termen liber $(R_1^0 + R_0^0)a_1 +$ coef. s din $R_0^0 a_0 = 0$.

Dacă alegem, în continuare, coeficientul lui s din R_0^0 egal cu zero, atunci funcţia $\overset{0}{v}$ este de forma cerută (90). Dar coeficientul lui s din R_0^0 este egal cu coeficientul lui s din $L_l^{l,p}$ plus termenul liber din $L_{l-1}^{l-1,p}$ înmulţit cu coeficientul lui s din raportul $\dfrac{T_{2n-2l}}{T_{2n-2l-1}}$.

Avem

$$L_l^{l,p} = 4^l \gamma_l^l + 4^{l-1} d_1[1 + \gamma_1^l + \gamma_2^l + \dots + \gamma_{l-1}^l]s + \dots \tag{92}$$

cu

$$\gamma_\delta^j = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_\delta = 1 \\ m_1 < \dots < m_\delta}}^{j} (l - m_1) \dots (l - m_\delta), \quad \gamma_l^l = 0$$

și

$$d_1 = \text{coeficientul lui } s \text{ din } \Delta_2 \Gamma.$$

De asemenea, avem

$$T_\mu = b_\mu^{i_1 \dots i_\mu} \pi_{i_1} \dots \pi_{i_\mu}.$$

Funcțiile $b_\mu^{i_1 \dots i_\mu}$ sînt olomorfe în $x^\alpha - a^\alpha$; deci pot fi dezvoltate în serie de puteri ale lui s:

$$b_\mu^{i_1 \dots i_\mu} = b_{\mu,0}^{i_1 \dots i_\mu} + b_{\mu,1}^{i_1 \dots i_\mu} s + \dots + b_{\mu,j}^{i_1 \dots i_\mu} s^j + \dots,$$

iar $\pi_j = 2s\, p_j$ (p_j o serie întreagă, $p_{j0} = p_j|_{s=0}$).

În consecință, pentru ca a_1 din (91) să fie nul, trebuie să fie îndeplinită relația

$$4^{l-1} d_1[1 + \gamma_1^l + \dots + \gamma_{l-1}^l] + 2\gamma_{l-1}^{l-1} \frac{b_{2n-2l,0}^{i_1 \dots i_{2n-2l}} p_{i_1,0} \dots p_{i_{2n-2l},0}}{b_{2n-2l-1,0}^{i_1 \dots i_{2n-2l-1}} p_{i_1,0} \dots p_{i_{2n-2l-1},0}} = 0 \tag{93}$$

Rezultă că, dacă alegem coeficientul $b_{2n-2,0}^{i_1 \dots i_{2n-2}}$ conform relației (93), atunci funcția $\overset{0}{v}$ este de forma (90).

Dependența de parametrul s a funcțiilor $\overset{r}{v}$. Pentru a determina ordinul de dependență în s a funcției $\overset{r}{v}$, integrală a ecuației (78), vom începe cu funcția $\overset{1}{v}$. Astfel, vom avea

$$\frac{\partial^n \overset{0}{v}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} \text{ de ordinul lui } s^{-n+2}$$

$$Y_{j,j}^{a}(\overset{0}{v}) \text{ de ordinul lui } s,$$

$$Y_{0,j}(\overset{0}{v}) \text{ de ordinul lui } s^{-2j+2},$$

$$Y_{k,n}^{p}(\overset{0}{v}) \text{ de ordinul lui } s^{-2n+2k+2};$$

de unde

$$V_{k,n}^{p}(\overset{0}{v}) = \begin{cases} s^{-2n+2k+2} K & \text{pentru } k = 0, \dots, n \\ s^{-2n+2k+3} K & \text{pentru } k = n+1, \dots, 2n-l-1 \end{cases}.$$

Termenul liber al ecuaţiei diferenţiale ce defineşte funcţia $\overset{1}{v}$ este $s^{l-1}f_1$ cu f_1 de ordin 0 în s. Deci

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 v_{l-1} \dots \frac{d}{ds}\left(s\,\frac{\overset{1}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right) = s^{l-1}K;$$

de unde

$$\overset{1}{v} = s^0 K.$$

Se demonstrează, fără dificultate, că, în cazul $l+1 \leqslant n-l-2$, avem

$$(94) \qquad \overset{r}{v} \text{ se comportă ca } \begin{cases} s^{-2r+2}\ln^{r-1} s, & 1 \leqslant r \leqslant l \\ s^{-2r+2}\ln^{l} s, & l+1 \leqslant r \leqslant n-l-2 \\ s^{-2r+1}, & r = n-l-1 \\ s^{-2r+1}\ln^{r-n+l} s, & n-l \leqslant r \leqslant n \\ s^{-2r+1}\ln^{l} s, & r \geqslant n+1 \end{cases}$$

sau, pentru $n-l-2 \leqslant l$:

$$(95) \qquad \overset{r}{v} \text{ se comportă ca } \begin{cases} s^{-2r+2}\ln^{r-1} s, & 1 \leqslant r \leqslant n-l-2 \\ s^{-2r+1}\ln^{r-(n-l)+1} s, & n-l-1 \leqslant r \leqslant l. \\ s^{-2r+1}\ln^{2l-n+1} s, & r \geqslant l+1 \end{cases}$$

Funcţiile $\overset{r}{v}$ definite de (94), respectiv (95), sînt infinite în origine, dar produsul $\overset{r}{v}\,\Gamma^r$ se anulează în origine, oricare ar fi $r \geqslant 1$.

Obţinem deci *rezultatul:*

Pentru ca ecuaţia cu derivate parţiale (7), *considerată într-un spaţiu cu un număr impar de dimensiuni, să admită soluţie elementară de forma* (8) *este necesar şi suficient ca între termenii liberi ai dezvoltării în serie a coeficienţilor* $b_{2n-2l-1}^{i_1 \dots i_{2n-2l-1}}$ *şi* $b_{2n-2l}^{i_1 \dots i_{2n-2l}}$ *să existe relaţia* (93).

Observaţie. În capitolul I, am tratat ecuaţia (1) cînd formele multiliniare A_ν satisfac condiţiile (3). Dacă A_μ satisfac condiţiile

$$(3') \qquad \begin{cases} A_\mu = -H_{\mu-1}^{\mu} + \displaystyle\sum_{\alpha_\mu = l-\mu+1}^{n-\left[\frac{\mu}{2}\right]} \mathcal{A}_{\mu\alpha_\mu} P_{\alpha\mu}; \quad \mu = 1, \dots, \nu \\ A_\mu = -H_{\mu-1}^{\mu} + \displaystyle\sum_{\mu_\mu = l-\mu}^{n-\left[\frac{\mu}{2}\right]} \mathcal{A}_{\mu\alpha_\mu} P^{\alpha\mu}; \quad \mu = \nu+1, \dots, l-1, \end{cases}$$

atunci ecuaţia cu derivate parţiale este

$$\Delta_2^n u + \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{j=2}^{n-l+\gamma-\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \theta_{2(2-l-j)+\gamma} \Delta_2^{l-\gamma+k} +$$

$$+ \sum_{\gamma=\nu+1}^{l} \sum_{j=1}^{n-l+\gamma-\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \theta_{2(n-l-j)+\gamma} \Delta_2^{l-\gamma+j} + Hu = 0,$$

cu Hu o formă diferenţială de ordin $2n - l + \nu$ cu coeficienţii vectori contravarianţi. Rezultatele se transcriu imediat, schimbînd pe l cu $l - \nu - 1$.

Capitolul III

FORMA INVARIANTĂ ŞI SOLUŢIA ELEMENTARĂ A ECUAŢIEI (7) PENTRU $l = n - 1$

Dacă $l = n - 1$, ecuaţia cu derivate parţiale (7) devine

$$\Delta_2^n u + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{j+1}^{\nu+1-\left[\frac{\nu}{2}\right]} \theta_{2(1-j)+\nu} \Delta_2^{n-1-\nu+j} u + Hu = 0. \tag{96}$$

Căutăm pentru ecuaţia (96) o soluţie de forma

$$u = v\Gamma^p$$

şi ecuaţia devine

$$Lu = \sum_{\beta=0}^{n} p(p-1)\dots(p-\beta+1)\Gamma^{p-\beta} V_\beta^p = 0 \tag{97}$$

cu

$$V_\beta^p = Y_{\beta,n}^p + \sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi_{\beta,\nu}^p(v) + \sum_{s=\beta}^{n} \sum_{k=0}^{s-\beta} v_{i_1 \dots i_{s-k-\beta}} U_{k,\beta}(C_s). \tag{98}$$

Pentru regularitatea funcţiei (97) de-a lungul suprafeţei $\Gamma = 0$, este necesar ca $V_n^p = 0$; deci ecuaţia ce determină funcţia v este

$$Y_{n,n}^p(v) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi_{n,\nu}^p(v) + vU_{0,n}(C_n) = 0. \tag{99}$$

Dar, conform formulei (33):

$$Y_{n,n}^p(v) = \sum_{i=1}^{n} s^i v^{(i)} \sum_{k=i}^{n} 2^{2k} L_{n-k}^{n,p} \alpha_k^i + vL_n^n.$$

De asemenea, folosind relaţiile (19) şi (21), obţinem

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi^{p}_{n,\nu}(v) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} Z^{n-\nu,1}_{n,\nu}[W_{n-\gamma}(Y_{\gamma,n-\nu}(v), T_\nu)] + \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} Z^{n-\nu,2}_{n,2}[---].$$

Atît $Z^{n-\nu,1}_{n,\nu}[---]$ cît şi $Z^{n-\nu,2}_{n,\nu}[---]$ intervin prin cea de a treia determinare a lor din (17), respectiv (18), şi obţinem

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi^{p}_{n,\nu}(v) = \sum_{\nu=1}^{n-1} Y^{p}_{n-\nu,n-\nu}(v)\, T_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-\nu} s^i v^{(i)} \sum_{k=i}^{n-\nu} 2^{2k} L^{n-\nu,p}_{n-\nu-k} \alpha^i_k + v L^{n-\nu,p}_{n-\nu} \right] T_\nu.$$

Ecuaţia (99) devine

$$2^{2n} s^n v^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} s^i v^{(i)} \sum_{\nu=0}^{n-1} T_\nu \sum_{k=i}^{n-\nu} L^{n-\nu,p}_{n-\nu-k} \alpha^i_k + \tag{100}$$

$$+ v \sum_{\nu=0}^{n} L^{n-\nu,p}_{n-\nu} T_\nu = 0$$

şi este o ecuaţie diferenţială de ordinul n, de tip Fuchs în jurul originii ($s = 0$). Ecuaţia determinantă este

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + \alpha + 1)\, a_0^{n-\alpha} + a_0^0 = 0, \tag{101}$$

cu $a_1^n = 1$, $a_0^{n-\alpha}$ = termen liber din $\sum_{k=n-\alpha}^{n} 2^{2(k-n)} L^{n,p}_{n-k} \alpha_k^{n-\alpha}$. Dar ecuaţia algebrică (101) se obţine din ecuaţia (36) pentru $l = n$, deci rădăcinile ei sînt

$$\rho_j = = -\frac{m + 2(p-1)}{2} + j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Cum funcţia v, integrală a ecuaţiei (100), trebuie să fie regulată şi diferită de zero în origine, ea corespunde valorii $\rho_{n-1} = 0$; de unde se deduce

$$p = -\frac{m}{2} + n. \tag{102}$$

În consecinţă, soluţia ecuaţiei (96) are o singularitate algebrică de grad $-\frac{m}{2} + n$ de-a lungul conoidului caracteristic $\Gamma = 0$ şi este de forma

$$u = v\Gamma^{-\frac{m}{2}+2}. \tag{103}$$

Deoarece funcţia v obţinută este determinată numai pe $\Gamma = 0$, (103) nu satisface ecuaţia (96) într-o vecinătate a conoidului. Atunci, ca în capi-

tolul I, căutăm funcţia v sub forma unei serii de puteri în Γ astfel încît pentru $\Gamma = 0$ să se reducă la integrala ecuaţiei (100), adică

$$v = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{v}\, \Gamma^r. \tag{104}$$

Funcţiile $\overset{r}{v}$ vor satisface ecuaţiile diferenţiale (76′) în care dăm lui l valoarea n; deci ele se vor deduce din ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{ s^2 \nu_{u-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^2 \nu_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^r \frac{\overset{r}{v}}{\overset{0}{v}} \right)\right)\right]\right\} = \frac{f_r}{\mathcal{S}_0^{n\,0} v}\, s^{n+r-2}, \tag{105}$$

cu

$$f_r = -\sum_{j=1}^{n} \frac{V_{n-j,\,r-j}^{p+j}\left(\overset{r-j}{v}\right)}{(p+2)\dots(p+r-j+1)}. \tag{106}$$

Prin recurenţă, se demonstrează că funcţiile $\overset{r}{v}$ devin infinite în origine ca $s^{-2r+1} \ln^r s$ pentru $r = 1,\dots,n$ şi ca $s^{-2r+1} \ln^n s$ pentru $r = n+1, \dots$; dar produsul $\overset{r}{v}\,\Gamma^r$ este nul în origine, oricare ar fi $r \neq 0$.

Deci se poate enunţa *rezultatul*:

Soluţia elementară a ecuaţiei (96) *este*

$$u = \Gamma^{-\frac{m}{2}+n} \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{v}\, \Gamma^r, \tag{107}$$

funcţiile $\overset{r}{v}$ *fiind imtegralele ecuaţiei* (105).

Se observă însă că din nou se impune condiţia ca spaţiul în care se tratează ecuaţia să fie cu un număr impar de dimensiuni, pentru ca determinarea funcţiilor $\overset{r}{v}$ să fie posibilă.

Capitolul IV

CONVERGENŢA SERIEI (104)

Pentru a putea utiliza soluţia elelementară a ecuaţiei (7) cu condiţia (93), cît şi a ecuaţiei (96), soluţie obţinută sub forma

$$u = v\,\Gamma^p = \Gamma^p \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{v}\, \Gamma^j$$

în cazul unui spaţiu Riemann asociat avînd un număr impar de dimensiuni, trebuie să determinăm domeniul de convergenţă (D) al seriei ce reprezintă funcţia v. Domeniul (D) va fi determinat aplicînd criteriul comparaţiei.

Ecuaţia dată este considerată într-un spaţiu riemannian R_m de metrică (4); conexiunea afină a spaţiului R_m este conexiunea lui Levi-Civita $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\left|{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right|$, construită cu ajutorul simbolurilor lui Christoffel de a doua speţă $\left|{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right|$ ale metricii (4). Vom alege un nou sistem de coordonate raportat la punctul $M(a^{\alpha})$, vîrful conoidului caracteristic, şi anume un sistem de coordonate normale $q_1, \ldots, q_m$ astfel încît toate simbolurile lui Christoffel de a doua speţă sînt nule. Atunci, în sistemul de coordonate $(q_1, \ldots, q_m)$, derivatele covariante în raport cu conexiunea lui Levi-Civita $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ a spaţiului R_m devin derivate obişnuite. De asemenea, în noul sistem de coordonate normale asociat punctului $M(a^{\alpha})$, bicaracteristicele ecuaţiei sînt linii drepte, iar conoidul caracteristic se reduce la un con pătratic.

Din teoria bicaracteristicelor, se ştie că

$$q_{\alpha} = sp_{0\alpha} \quad \text{unde} \quad p_{0\alpha} = p_{\alpha}|_{s=0}.$$

Să notăm cu $\sigma = \sum_{i=1}^{m} |q_i| = s \sum_{i=1}^{m} |p_{0i}|$.

Cum cantităţile p_{0i} sînt constante, atunci σ este proporţională cu s de-a lungul geodezicelor

$$\sigma = as.$$

Ecuaţia cu derivate covariante (7), căreia i s-a construit soluţia elementară, devine o ecuaţie cu derivare parţiale obişnuite în raport cu variabilele $q_1, \ldots, q_m$.

Presupunem că seriile respective ale coeficienţilor ecuaţiei date sînt convergente pentru $s < r$, deci pentru $\sigma < ar \leqslant \rho$. Putem alege atunci o constantă A astfel încît toţi coeficienţii ecuaţiei să fie majoraţi de

$$\frac{A}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}. \tag{108}$$

Funcţia Γ din ecuaţia conoidului caracteristic este de ordinul doi în s şi deci Γ_{α} este de ordinul întîi iar $\Gamma_{\alpha\beta}$ de ordinul zero. Prin alegerea convenabilă a constantei A putem avea îndeplinite şi relaţiile

$$\Gamma \leqslant \frac{\sigma^2 A}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}, \quad \Gamma_{\alpha} \leqslant \frac{\sigma A}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}, \quad \Gamma_{\alpha\beta} \leqslant \frac{A}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}. \tag{109}$$

Funcţia $\overset{0}{v}(s)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale (34), respectiv (100), şi este reprezentată sub forma unei serii de puteri în s, uniform convergentă pentru $s < r$, serie pe care o majorăm printr-o progresie geometrică

$$\overset{0}{v}(s) \leqslant \frac{B}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}, \tag{110}$$

B fiind o constantă convenabil aleasă.

Fie o funcție $\varphi(s)$ astfel încît

$$\varphi(s) \leqslant \frac{\lambda}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\mu}}. \tag{111}$$

Funcțiile $V_k^p(\varphi)$ determinate de (24) vor satisface relația

$$V_k^p(\varphi) < \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu(\mu+1)\dots(\mu+2n-k-1)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\mu+3n}}, & k=0,1,\dots,n-1 \\[2ex] \dfrac{\lambda\mu(\mu+1)\dots(\mu+2n-k-1)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\mu+2n+l+2}}, & k=n,\dots,2n-l-1 \end{cases}. \tag{112}$$

Să ne situăm în cazul $l=n-1$. Funcția $\overset{0}{v}(s)$ satisface inegalitatea (110). Să demonstrăm că funcțiile $\overset{j}{v}(s)$ satisfac inegalitățile

$$\overset{j}{v}(s) < \frac{B_j}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+1}}, \quad j=0,1,\dots, \tag{113}$$

B_j fiind constante față de σ.

Demonstrația o vom face prin inducție completă. Pentru $j=0$, relația (113) coincide cu relația (110). Presupunem acum că relația (113), este adevărată pînă la indicele $j-1$. Ecuația diferențială ce determină funcția $\overset{j}{v}$ este

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2\nu_{n-1}\dots\frac{d}{ds}\left[s^2\nu_1\frac{d}{ds}\left(s^j\frac{\overset{j}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right]\right\} = \frac{s^{n+j-2}f_j}{\overset{0}{v}\mathcal{S}_0^n} \tag{114}$$

cu

$$f_j = -\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{V_{n-\alpha,\,j-\alpha}^{p+\alpha}\left(\overset{j-\alpha}{v}\right)}{(p+j)\dots(p+j+\alpha+1)}.$$

Folosind relațiile (122) obținem că

$$f_j < \frac{T_j}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+n}}$$

cu

$$T_j = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{B_{j-\alpha}[(2n+1)(j-\alpha)+1]\dots[(2n+1)(j-\alpha)+n+\alpha]}{(p+j)\dots(p+j-\alpha+1)}. \tag{115}$$

Notăm cu η minimul funcțiilor $\overset{0}{v}$, $\mathcal{S}_0^n$, $\nu_1,\dots,\nu_n$; acest minim nu este zero, funcțiile respective fiind olomorfe și diferite de zero.

Ecuația (114) poate fi înlocuită cu inegalitatea

$$\frac{d}{ds}\left[s^2\nu_{n-1}\cdots\frac{d}{ds}\left(s^j\frac{\overset{j}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right]<\frac{T_j}{\eta^2}\,\frac{s^{n+j-2}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+n}}. \tag{114'}$$

Ținînd seama că pentru $k+1>0$, $l-k-2\geqslant 0$ avem

$$\frac{1}{k+1}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\sigma^{k+1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{l-1}}\right)\geqslant\frac{\sigma^k}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^l}$$

și integrînd relația (114) de-a lungul geodezicelor între 0 și s, obținem

$$s^2\nu_{n-1}\frac{d}{ds}\left[s^2\nu_{n-2}\cdots\frac{d}{ds}\left(s^j\frac{\overset{j}{v}}{\overset{0}{v}}\right)\right]\leqslant\frac{T_j}{\eta^2a^{n+j-1}(n-j+1)}\,\frac{\sigma^{n+j-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+n-1}}$$

Repetînd procedeul de $n-1$ ori, funcția $\overset{j}{v}$ va satisface inegalitatea

$$\overset{j}{v}<\frac{B_j}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+1}}\quad\text{cu}\quad B_j=\frac{B}{\eta^{n+1}(n+j-1)\ldots j}T_j. \tag{116}$$

Constanta T_j depinde de $B_{j-1},\ldots,B_{j-n}$; atunci, între constantele $B_j,\ldots,B_{j-n}$ există relația

$$B_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha(j)B_{j-\alpha}. \tag{117}$$

Ecuația (117) este o ecuație cu diferențe finite de tip Poincaré, coeficienții acestei ecuații avînd limite finite cînd $j\to\infty$. În adevăr:

$$\lambda_\alpha(j)=\frac{B}{\eta^{n+1}}\,\frac{[(2n+1)(j-\alpha)+1]\ldots[(2n+1)(j-\alpha)+n+\alpha]}{(p+j)\ldots(p+j-\alpha+1)(n+j-1)\ldots j}$$

și

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_\alpha(j)=\frac{B}{\eta^{n+1}}(2n+1)^{n+\alpha}=a_\alpha.$$

Ecuația caracteristică asociată ecuația cu diferențe finite (117) este

$$\xi^n-\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha\,\xi^{n-\alpha}=0. \tag{118}$$

Conform teoremei lui Perron [7], dacă unele din rădăcinile ξ_i ale ecuației (118) au module egale și dacă pentru orice j coeficientul $\lambda_n(j)$ este diferit de zero, condiție îndeplinită în cazul de față, atunci ecuația (117) admite un sistem fundamental de integrale care se descompune în mai multe clase,

fiecare clasă corespunzînd rădăcinilor de acelaşi modul, astfel încît pentru o integrală B_j aparţinînd clasei de modul e avem

$$\lim_{j\to\infty} \sup \sqrt[j]{B_j} = e.$$

Să notăm cu ξ_1 rădăcina ecuaţiei (119) de modul cel mai mare şi să alegem soluţiile ecuaţiei (117) astfel încît

$$\lim \sup \sqrt[j]{B_j} = |\xi_1|. \tag{119}$$

Conform inegalităţilor (113), seria $\sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{v}\, \Gamma^j$ este majorată de seria

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(2n+1)j+1}} \Gamma^j,$$

convergentă în domeniul

$$|\Gamma| < \frac{1}{|\xi_1|}\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{2n+1}; \tag{120}$$

deci şi seria $\sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{v}\, \Gamma^j$ va fi convergentă în domeniul definit de (120).

În acelaşi mod se determină domeniile de convergenţă ale tuturor seriilor ce intervin, domenii de diferă între ele prin valoarea constantei ξ_1, pentru aceeaşi valoare l, şi prin exponent, pentru diverse valori l.

BIBLIOGRAFIE

1. **Veronica Antohi-Teodorescu,** *Soluţia elementară a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare de ordin 2n, de tip hiperbolic cu pînză caracteristică multiplă de ordin n. Forma ecuaţiei*; An. Univ. Bucureşti, seria şt. nat., mat.-mec., 2 (1967), p. 13–23.
2. **N. Teodorescu,** *Sur les solutions élémentaires des équations aux derivées partielles à caractéristiques multiples*; Journal de Math. pures et appl., serie IX (1937–1938), p. 329–343.
3. **N. Teodorescu,** *Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux derivées partielles linéaires d'ordre superieur*; Comentarii Math. Helvetici, vol. XI, MCMXXXVII|VIII, fasc. 2, p. 1–42.
4. **J. Hadamard,** *Le problème de Cauchy et les équations aux derivées partielles linéaires hyperboliques*; Paris, 1932.

5. **M. Nicolescu,** *Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques*; Disquisitiones Math. et Phys. (1940), t. I, fasc. I, p. 43–56.
6. **N. Teodorescu.** *Asupra necesităţii caracterului algebric sau algebrico-logaritmic al singularităţilor soluţiilor elementare*; Bul. şt., seria de şt. mat. fiz., t. VII (1955), nr. 4.
7. **A. Ghelfond,** *Calculul cu diferenţe finite*; Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.

Primită la 3.V.1973

Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică-Mecanică

LA DÉTERMINATION DE LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUATION AUX DERIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2n, HYPERBOLIQUE, À CARACTÉRISTIQUE MULTIPLE D'ORDRE n.I. LE CAS D'UN NOMBRE IMPAIR DE VARIABLES INDÉPENDANTES

Résumé

On considère l'équation (1) dans un espace de Riemann R_m à m dimensions, tel qu' elle admet une solution à singularité algébrique (2) au long du conoïde caractéristique $\Gamma = 0$. Dans le chapitre I, on donne la forme invariante de l'équation, quand les formes A_ν satisfont les conditions (3) et on détermine la solution élémentaire correspondante. La forme invariante a l'expression (7). Les conditions (3) sont nécessaires pour l'existence de la solution élémentaire de la forme donnée (8), mais elles ne sont pas suffisantes.

Dans la chapitre II, on détermine la solution élémentaire pour une forme particulière de l'équation (7), tel que l'intégrale $\overset{0}{v}$ de l'équation (34) soi de la forme (90); alors, dans le cas où m est impair, est nécessaire et suffisante que entre les termes libres du développement en série des coefficients $b_{2n-2l-1}^{i_1 \cdots i_{2n-2l-2}}$ et $b_{2n-2l}^{i_1 \cdots i_{2n-2l}}$ soit la relation (93).

Dans le chapitre III, on considère la forme invariante et la solution élémentaire de l'équation (7) pour $l = n - 1$; on démontre: *La solution élémentaire de l'équation* (96) *a la forme* (107), *les fonctions v étant les intégrales de l'équation* (105).

Dans le chapitre IV, on étudie la convergence de la série (104).

POINTWISE DEGENERATE SECOND ORDER DELAY-DIFERENTIAL SYSTEMS

BERNARD A. ASNER, Jr.* – A. HALANAY

1. INTRODUCTION

The primary purpose of this paper is to state and prove *constructive* theorems for pointwise degenerate delay-differential equations. We assume knowledge of the triple (A, q, h), where A is a matrix of order n with complex entries, q an n-vector with complex components, and h a positive scalar. We would like to build or construct an $n \times nm$ matrix $B = (B_1\, B_2 \ldots B_m)$ using the given triple such that all solutions of the delay-differential equation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j x(t - jh) \qquad (B_m \neq 0) \tag{1}$$

satisfy the degeneracy property $q^* x(t) \equiv 0$ for $t \geq t_1$. From the optimal control viewpoint, we sometimes select B to satisfy a performance index. For example, minimize t_1. Popov [9], for $n \geq 3$ and subject to some constraints on (A, q, h), gave an elegant construction for $B = B_1$ and proved that the minimal time was $t_1 = 2h$. It has been shown by several authors that degeneracy cannot occur for $n = 2$ and one delay. However, there do exist some construction theorems for $n = 2$ and $m = 2$ (see Asner and Halanay [1], [3]), again subject to constraints on (A, q, h).

In the present paper, we will be concerned mainly with second order systems ($n = 2$) and will prove some general structure theorems. The second section of this paper is used to review previous known algebraic criteria of pointwise degenerate systems and to introduce the necessary definitions and notation. In section three, we will show to construct *all* pointwise degenerate systems if $m = 2$ and prove that degeneracy must necessarily start at 2h. Section four is devoted to the study of three lags ($m = 3$). While the addition of another lag term introduces complexities in the control, at the same time, this additional lag term introduces additional parameters which may be utilized to construct a class of controls that solve the "minimal time" problem. We will also be able to relax the requirements on (A, q, h) and show how it is possible to control nonobservable plants, e.g., $A = 0$. Other relevant papers may be found in the references.

* *Exchange Scientist,* National Academy of Sciences (USA).

2. REVIEW OF PREVIOUS RESULTS

We refer the reader to Asner and Halanay [3] for further explanation of this section.

DEFINITION 1. Eqn. (1) is said to be *pointwise degenerate* (p.d.) at t_1 with respect to the vector q if for all initial functions given on the interval $[-mh, 0]$ the corresponding solution $x(t)$ satisfies $q^* x(t_1) = 0$[11]. Otherwise, if no such q and t_1 exist the delay-differential equation is called *pointwise complete*. The largest set of real numbers at which the equation is p.d. with respect to q is called the *degeneracy set for* q.

Introduce A_k, C_k, and q_k as the block matrices

$$A_k = \begin{bmatrix} A & & & & & & & \\ B_1 & A & & & & & & \\ B_2 & B_1 & A & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ B_m & B_{m-1} & & & & & & \\ 0 & B_m & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 \dots & B_m & B_{m-1} \dots & B_2 & B_1 & A, \end{bmatrix} \qquad C_k = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \dots B_m \\ B_2 & B_3 \dots \\ B_3 \dots & B_m \\ \vdots & \\ B_m & \\ & \\ & \end{bmatrix} \tag{2}$$

and

$$q_k^* = (0 \quad 0 \dots 0 \; q^*)$$

where A_k is $nk \times nk$, C_k is $nk \times nm$, and q_k^* is $1 \times nk$.

Using this notation, define the $nk \times nm$ polynominal matrix $S_k(s)$ by

$$(sI_{nk} - A_k)\, S_k(s) = C_k \det(sI_{nk} - A_k) \tag{3}$$

where I_{nk} is the $nk \times nk$ identity matrix. We may write

$$S_k(s) = P_0^k + P_1^k s + \dots + P_{nk-1}^k s^{nk-1} \tag{4}$$

where

$$P_i^k = (\alpha_{i+1} I_{nk} + \alpha_{i+2} A_k + \dots + A_k^{nk-1-i})\, C_k \tag{5}$$
$$i = 0, \dots, nk - 1$$

and α_j are the coefficients of the characteristic polynomial of A_k:

$$det(sI_{nk} - A_k) = \sum_{j=0}^{nk} \alpha_j s^j \qquad (\alpha_{nk} = 1). \tag{6}$$

The main results of Asner and Halanay [3] are contained in the following theorems:

THEOREM A. *Assume Eqn.* (1) *is p.d. at* t_1 *with respect to the vector* $q \neq 0$. *Then the degeneracy set is of the form* $[(k-1)h, \infty)$ *where* k *is the smallest integer with the property*

$$q_{k-1}^* S_{k-1}(s) \neq 0, \qquad q_k^* S_k(s) \equiv 0. \tag{7}$$

Moreover, $k \geq 3$.

THEOREM B. *Eqn.* (1) *is p.d. with respect to* q *at* $t_1 > 0$ *iff there exist integers* $l > 0$, $k > 0$ $(t_1 \geq kh)$, *an* $l \times nk$ *matrix* $R = (R_1\ R_2 \dots R_k)$ *of rank* l, *an* $l \times l$ *matrix* V *and an* l*-vector* v *such that*

$$RC_k = 0 \tag{8}$$

$$RA_k = VR \tag{9}$$

and

$$v^*(e^{Vh}R_1,\ e^{Vh}R_2 - R_1 \dots,\ e^{Vh}R_k - R_{k-1},\ - R_k) = -\ q^*_{k+1}. \tag{10}$$

Remark 1. We shall assume $R_1 \neq 0$. Otherwise Eqns. (8), (9), (10) may be satisfied with $R = (R_2 \dots R_k)$ and we may replace k by $k - 1$.

The following lemma will be used in the remaining sections.

LEMMA A. *Assume* $n = 2$ *and* $q^*B_i = 0 (i = 1, \dots, m)$. *Then Eqn.* (1) *is not pointwise degenerate with respect to* q.

Proof. Assume Eqn, (1) is pointwise degenerate at kh and let x be any solution. Then $q^*\dot{x}(t) = q^*Ax(t)$ for positive t and p.d. implies $q^*Ax(t) \equiv 0$ for $t \geq kh$. We have $q^*A = \alpha q^*$ or else $x(t) \equiv 0$ for $t \geq$ kh; the first contradicts the assumption of pointwise degeneracy. If $x(t) \equiv 0$ for $t \geq kh$, then in particular the Euler solution $x(t) = e^{\alpha t}\tilde{x}(\alpha) \equiv 0$, and the characteristic equation of Eqn. (1) would have no zeroes.

3. POINTWISE DEGENERATE SYSTEMS FOR n = 2, m = 3

This section is devoted to the case when $n = 2$, $m = 2$, i.e.,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1x(t - h) + B_2x(t - 2h). \tag{S_2}$$

THEOREM 1. *Assume* $n = 2$, $m = 2$, *and Eqn.* (S_2) *is p.d. at* $t_1 > 0$ *with respect to* $q \neq 0$. *Then* (i) *degeneracy occurs at* 2h, (ii) (q^*, A) *is completely observable,* (iii) (A, B) *is completely controllable,* (iv) *there exists a* 2×2 *matrix* $Z = rq^*e^{Ah}$, *where* r *is defined by* $q^*r = 1$ *and* $q^*e^{Ah}r = 0$, *such that* $B_1 = AZ - ZA$, $B_2 = -ZB_1$.

Proof. The only thing to prove is (i) since the rest of the theorem follows from the results in [3]. From Theorem *A there exists a minimal* $k \geq 3$ such that $q^*_{k-1}S_{k-1}(s) \neq 0$, $q^*_kS_k(s) \equiv 0$. From(4), (5) and the Cayley Hamilton theorem we deduce that

$$q^*_kA^j_kC_k = 0 \quad \text{for all integers } j. \tag{11}$$

With $m = 2$, A_k and C_k are

$$A_k = \begin{bmatrix} A & & & & \\ B_1 & A & & 0 & \\ B_2 & B_1 & A & & \\ & 0 & & & \\ & & B_2 & B_1 & A \end{bmatrix} \qquad C_k = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & 0 \\ & \\ 0 & \\ & \end{bmatrix} = (L_k\, M_k)$$

We note that $q_k^* A_k = q^*(0, 0, \ldots, 0, B_2, B_1, A)$,

$$q_k^* A_k^2 = q^*(0, 0, \ldots, 0, B_2^2, B_1 B_2 + B_2 B_1, AB_2 + B_2 B_1, AB_2 + \\ + B_2 A + B_1^2, AB_1 + B_1 A, A^2) \quad (k \geq 5)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \text{*)}$$

and using this reasoning conclude the existence of an integer k' such that

$$q_k^* A_k^j C_k = (0 \quad 0) \qquad \text{if } j = 0, 1, \ldots, k' - 1,$$

$$q_k^* A_k^{k'} C_k = (\,.\, q^* B_2^{k'+1}) \qquad \text{if } k = 2k' + 1,$$

$$q_k^* A_k^j C_k = (0 \quad 0) \qquad \text{if } j = 0, 1, \ldots, k' - 2,$$

$$q_k^* A_k^{k'-1} C_k = (q^* B_2^{k'} \quad 0) \qquad \text{if } k = 2k'.$$

Thus we have $q^* B_2^j = 0$ for some $j \geq 1$. From the Cayley Hamilton theorem $B_2^2 = \operatorname{tr}(B_2) B_2$, hence $\operatorname{tr}(B_2) q^* B_2 = 0$. We now distinguish two separate cases.

(i) $\operatorname{tr}(B_2) \neq 0, q^* B_2 = 0$. Since $n = 2$ we may write $B_2 = bc^*$ and $c^* b \neq 0$ Using (11) again with $q^* B_2 = 0$, we conclude that $q^* B_1 B_2^j = 0$ for some j, hence $q^* B_1 B_2 = 0$. The condition $RC_k = 0$ in Theorem B is equivalent to $R_1 B_1 + R_2 B_2 = 0$, $R_1 B_2 = 0$ and we must have $R_1 = r_1 q^*$ for an l-vector r_1. Thus $r_1 q^* B_1 + R_2 B_2 = 0$ and multiplying this on the right with B_2 results in $R_2 B_2^2 = 0$. Using the Cayley Hamilton theorem and $\operatorname{tr}(B_2) \neq 0$, we deduce $R_2 B_2 = 0$, hence $r_1 q^* B_1 = 0$. By Remark 1 (we assumed k to be minimal), $r_1 \neq 0$, hence $q^* B_1 = 0$. From Lemma A, $\operatorname{tr}(B_2) \neq 0$ implies equation (1) is not pointwise degenerate with respect to q, a contradiction. Therefore, we have to assume

(ii) $\operatorname{tr}(B_2) = 0$, $B_2^2 = 0$. We let $B_2 = bc^*$ with $c^* b = 0$. As above, we have $R_1 = r_1 c^*$ and $r_1 c^* B_1 + R_2 bc^* = 0$, hence $c^* B_1 b = 0$. Thus there exist scalars α, β such that

$$c^* B_1 = \alpha c^*, \; B_1 b = \beta b, \text{ and } B_1 B_2 = \beta B_2, \; B_2 B_1 = \alpha B_2. \tag{12}$$

From $RA_k = VR$ (see Theorem B), we have

$$R_1 A + R_2 B_1 + R_3 B_2 = VR_1 \tag{13}$$

$$R_2 A + R_3 B_1 + R_4 B_2 = VR_2. \tag{14}$$

Now postmultiply (13) by B_2 and use $R_1 B_2 = 0$, $B_2^2 = 0$ to obtain

$$r_1 (c^* A b)\, c^* + R_2 B_1\, bc^* = 0.$$

Since $B_1 b = \beta b$, we conclude that $(c^* A b)\, r_1 + \beta\, R_2 b = 0$, and $R_1 B_1 + R_2 B_2 = 0$ implies that $\alpha r_1 + R_2 b = 0$. Hence

$$c^* A b = \alpha\beta \quad \text{and} \quad B_2 A B_2 = \alpha\beta\, B_2. \tag{15}$$

* The smaller k, the easier it is to ohtain the conclusion!

We will now prove by induction on k that

$$q_k^* A_k^j C_k = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, k-3 \tag{16}$$

$$q_k^* A_k^{k-2} C_k = ((\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2, 0) \tag{17}$$

$$q_k^* A_k^{k-1} M_k = \beta(\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2 \tag{18}$$

A direct computation shows that these are valid for $k = 3$. If we assume their validity for all integers up to k, we have

$$q_{k+1}^* A_{k+1}^j C_{k+1}^* = q_{k+1}^* \begin{bmatrix} A^j & 0 \\ L_k^{(j)} & A_k^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ M_k & 0 \end{bmatrix}$$

where

$$L_k^{(j)} = A_k^{j-1} L_k + A_k^{j-2} L_k A + \ldots + L_k A^{j-1}.$$

Thus

$$q_{k+1}^* A_{j+1}^k C_{k+1} = q_k^*(L_k^{(j)} B_1 + A_k^j M_k, L_k^{(j)} B_2).$$

From (16) and (17), we deduce $q_k^* A_k^j M_k = 0$ for $j = 0, 1, \ldots, k-2$ and from (16) we deduce $q_k^* L_k^{(j)} = q_k^*(A_k^{j-1} L_k + \ldots + L_k A^{j-1}) = 0$ for $j = 1, \ldots, k-2$ and (16) is true for k replaced by $k+1$. To prove (18) for k replaced by $k+1$ we see that

$$q_{k+1}^* A_{k+1}^k M_{k+1} = q_{k+1}^* \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ L_k^{(k)} & A_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} = q_k^* L_k^{(k)} B_2 =$$

$$= q_k^*(A_k^{k-1} L_k + A_k^{k-2} L_k A + \ldots + L_k A^{k-1}) B_2 = \beta q_k^* A_k^{k-1} M_k + q_k^* A_k^{k-2} L_k A B_2 =$$

$$= \beta^2(\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2 + (\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2 A B_2 = \beta(\alpha + \beta)^{k-1} q^* B_2.$$

To show (17) for k replaced by $k+1$ we compute

$$q_{k+1}^* A_{k+1}^{k-1} C_{k+1} = q_{k+1}^* \begin{bmatrix} A^{k-1} & 0 \\ L_k^{(k-1)} & A_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ M_k & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= q_k^*(L_k^{(k-1)} B_1 + A_k^{k-1} M_k, L_k^{k-1} B_2).$$

But

$$q_k^* L_k^{k-1} B_2 = q_k^*(A_k^{k-2} L_k + A_k^{k-3} L_k A + \ldots + L_k A^{k-2}) B_2 = q_k^* A_k^{k-2} L_k B_2 =$$

$$= (\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2^2 = 0.$$

Also

$$q_k^* L_k^{(k-1)} B_1 = q_k^* A_k^{k-2} L_k B_1 = (\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2 B_1 = \alpha(\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2$$

and from (18) $q_k^* A_k^{k-1} M_k = \beta(\alpha + \beta)^{k-2} q^* B_2$. Thus $q_{k+1}^* A_{k+1}^{k-1} C_{k+1} = (\alpha + \beta)^{k-1} q^* B_2, 0)$ and (17) is proved. The induction proof is thus finished and (16), (17), (18) are established for our k.

From (11) and (17) we deduce that $(\alpha + \beta)\, q^* B_2 = 0$. If $q^* B_2 = 0$ then q is proportional to c and using Eqn. (S_2) with $c^* B_1 = \alpha c^*$ gives $q^* \dot{x}(t) = q^* A x(t) + \tilde{\alpha} q^* x(t-h)$ where $\tilde{\alpha}$ is a scalar. The p.d. assumption implies for large enough t that $q^* A x(t) = 0$, hence $q^* A = \lambda q^*$ and $q^* x$ satisfies the scalar delay equation $q^* \dot{x}(t) = \lambda q^* x(t) + \tilde{\alpha} q^* x(t-h)$ for positive t. Since scalar equations are pointwise complete we have a contradiction, hence we must have $q^* B_2 \neq 0$ and $\alpha + \beta = 0$. Note that $\alpha = 0$ will imply from (12) $B_1 = b\tilde{c}^*$ and from (15) $c^* A = \tilde{\alpha} c^*$; in this case the contradiction will follow from [2]. Thus $\alpha \neq 0$ and with $\alpha + \beta = 0$ (see (12)) B_1 *is invertible.*

Now postmultiply (13) and (14) by B_1, B_2, respectively, and use $R_1 B_1 + R_2 B_2 = 0$ and $\alpha + \beta = 0$ to obtain

$$r_1 c^* A B_1 + R_2 (B_1^2 + A B_2) = 0. \tag{19}$$

From $(B_1^2 + A B_2) B_2 = \alpha^2 B_2$ and $B_2 (B_1^2 + A B_2) = 0$, deduce that $B_1^2 + A B_2 = b\tilde{c}^*$, $\tilde{c}^* b = \alpha^2$. Now, using $R_2 b = -\alpha r_1$ in (19) yields $r_1 (c^* A B_1 - \alpha \tilde{c}^*) = 0$. Thus $\tilde{c}^* = \alpha^{-1} c^* A B_1$ and

$$B_1^2 + A B_2 - \alpha^{-1} B_2 A B_1 = 0. \tag{20}$$

We will now show by induction on j that $q_3^* A_3^j C_3 = 0$ for $j = 0, 1, \ldots$. Define the matrices $X_j Y_j$ by the equality $q_3^* A_3 = q^* (X_j, Y_j, A^j)$. From the definition of C_3, we have

$$q_3^* A_3^j C_3 = q^* (X_j B_1 + Y_j B_2 \; X_j B_2).$$

For $j = 1$

$$X_1 B_1 + Y_1 B_2 = B_2 B_1 + B_1 B_2 = 0$$

$$X_1 B_2 = B_2^2 = 0.$$

Assume that

$$X_j B_1 + Y_j B_2 = 0, \qquad X_j B_2 = 0$$

then

$$X_j = -\alpha^{-1} Y_j B_2, \quad q_3^* A_3^j = q^* (-\alpha^{-1} Y_j B_2, \; Y_j, \; A^j).$$

Therefore

$$q_3^* A_3^{j+1} = q^* (-\alpha^{-1} Y_j B_2 A + Y_j B_1 + A^j B_2, \; Y_j A + A^j B_1, \; A^{j+1})$$

and

$$q_3^* A_3^{j+1} C_3 = q^* \left[Y_j (B_1 - \alpha^{-1} B_2 A)\, B_1 + A^j B_2 B_1 + Y_j A B_2 + \right.$$

$$\left. + A^j B_1 B_2, \; Y_j (B_1 - \alpha^{-1} B_2 A)\, B_2 \right] = q^* \left[Y_j (B_1^2 + A B_2 - \alpha^{-1} B_2 A B_1) + \right.$$

$$\left. + A^j (B_2 B_1 + B_1 B_2), \quad Y_j (B_1 - \alpha^{-1} B_2 A) B_2 \right].$$

Using (20), (12) and (15) we have the desired result. Hence we have shown that $q_3^* S_3(s) = 0$ and degeneracy has to start at 2h (Theorem A). Q.E.D.

The reader should note the complexity of this proof and compare it with the proof of the analogous result when $n = 3$, $m = 1$ (see Popov [9]).

Remark 2. The construction in the last theorem is unique. To see this, let $w^* R_2 = 0$. Then $R_1 B_1 + R_2 B_2 = 0$ and B_1 nonsingular imply $w^* R_1 = 0$. Since $R = (R_1 R_2)$ is $l \times 4$ and rank $(R) = l$, we have $w = 0$. From Theorem B, $R_2 A = V R_2$ and $v^* R_2 = q^*$. If $R_2 w = 0$ then $q^* A w = 0$. But (q^*, A) is completely observable so that $w = 0$. Hence R_2 is invertible and the n.a.s.c. of theorem B may be written by defining $Z = R_2^{-1} R_1$ as $B_1 = AZ - ZA$, $B_2 = -ZB_1$, $ZB_2 = 0$, $q^* e^{Ah} = q^* Z$, and $q^* e^{Ah} Z = 0$. Thus $ZB_2 = -Z^2 B_1 = 0$ results in $Z^2 = 0$ and $Z = r q^* e^{Ah}$.

Remark 3. It was shown in [3] that $n = 2$ and degeneracy occuring at 2h implies $m = 2$.

Remark 4. All p.d. systems with $n = 2$, $m = 2$ are trivial in the sense of Henry [8]. Indeed $(sI - A - zB_1 - z^2 B_2) = (I - zZ)(sI - A)(I + zZ)$ and $\det(sI - A - zB_1 - z^2 B_2) = \det(sI - A)$.

Example 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad q^* = (1 \ \ -1), \quad h = 1.$$

$$q^* e^{Ah} = (0 \ -1), \qquad r^* = (1 \ \ 0), \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. POINTWISE DEGENERATE SYSTEMS FOR n = 2, m = 3

In this sections we assume we have three lag terms $B = (B_1 \ B_2 \ B_3)$, $B_3 \neq 0$. With this additional freedom we will be able to show the existence of additional parameters that will be available for the construction of the B matrix. From Remark 3, the system of this section

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 x(t - h) + B_2 x(t - 2h) + B_3 x(t - 3h) \qquad (S_3)$$

cannot be degenerate before $3h$ if $n = 2$. Our results show that the minimal time is indeed $3h$ and with the additional parameters we may construct a class of controls that solve the „minimal time" problem. In addition, we give examples of p.d. systems when the couple (q^*, A) is not completely observable.

The following lemma is valid for arbitrary n.

LEMMA 1. *Let the triple* (A, q,h) *be given. If there exist matrices* Z_1, Z_2, B_1, B_2, B_3 *that satisfy*

$$\left.\begin{array}{l} q^* e^{Ah} Z_1 = 0,\ q^* e^{Ah} Z_2 = q^* Z_1,\ q^* e^{hA} = q^* Z_2, \\ B_1 = AZ_2 - Z_2 A,\ B_2 = AZ_1 - Z_1 A - Z_2 B_1,\ B_3 = -Z_1 B_1 - Z_2 B_2, \\ Z_1 B_2 + Z_2 B_3 = 0,\ Z_1 B_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (21)$$

then (S_3) *is p.d. with respect to* q *at* $3h$.

Proof. In Theorem B, let $(R_1\ R_2\ R_3) = (Z_1\ Z_2\ I)$, $V = A$, and $v^* = q^*$. Under certain conditions the matrices Z_1 and Z_2 will exist.

LEMMA 2. *Let* $n = 2$, (q^*, A) *be completely observable and* (S_3) *be p.d. at* $3h$ *with respect to* q. *Then there exist matrices* Z_1, Z_2 *which satisfy* (21).

Proof. The conditions in Theorem B with $k = 3$ become

$$R_1 B_1 + R_2 B_2 + R_3 B_3 = 0, \quad R_1 B_2 + R_2 B_3 = 0, \quad R_1 B_3 = 0, \quad (22)$$

$$R_1 A + R_2 B_1 + R_3 B_2 = V R_1, \quad R_2 A + R_3 B_1 = V R_2, \quad R_3 A = V R_3, \quad (23)$$

$$v^* e^{Vh} R_1 = 0, \quad v^* e^{Vh} R_2 = v^* R_1, \quad v^* e^{Vh} R_3 = v^* R_2, \quad v^* R_3 = q^*. \quad (24)$$

The necessary condition $q_4^* A_4 C_4 = 0$ (see (11) with $k = 4$) is

$$q^* B_3^2 = 0, \quad q^*(B_2 B_3 + B_3 B_2) = 0, \quad q^*(B_1 B_3 + B_3 B_1 + B_2^2) = 0. \quad (25)$$

From $q^* B_3^2 = 0$, B_3 is a matrix of unit rank, and we may use the representation $B_3 = bc^*$. If $B_3^2 \neq 0$, then $c^* b \neq 0$ and $q^* B_3 = 0$. $R_1 B_3 = 0$ implies that $R_1 = r_1 q^*$ where r_1 is an l-vector. Also $q^*(B_2 B_3 + B_3 B_2) = q^* B_2 B_3 = 0$ and $R_1 B_2 + R_2 B_3 = 0$ imply $R_2 = r_2 q^*$ for r_2 an l-vector. Thus $q^* B_2 = 0$. From $R_1 B_1 + R_2 B_2 + R_3 B_3 = 0$ and $q^*(B_1 B_3 + B_3 B_1 + B_2^2) = q^* B_1 B_3 = 0$, we get $q^* B_1 = 0$. Now use Lemma A to establish a contradiction. Thus $B_3 = bc^*$ and $c^* b = 0$.

We represent the $l \times 2$ matrices

$$R_j = l_j b^* + r_j c^* \qquad (j = 1, 2, 3)$$

using l-vectors l_j, r_j and 2-vectors b, c. From (22) we obtain the following relations:

$$R_1 = r_1 c^*, \quad R_2 = l_2 b^* + r_2 c^*, + r_2 c^*, \quad R_3 = l_3 b^* + r_3 c^* \quad (26)$$

$$(c^* B_2 c)\, r_1 + (b^* b)\,(c^* c)\, l_2 = 0 \quad (27)$$

$$(c^* B_1 c)\, r_1 + (b^* B_2 c)\, l_2 + (c^* B_2 c)\, r_2 + (b^* b)\,(c^* c)\, l_3 = 0 \quad (28)$$

$$c^* B_2 b = 0, \quad c^* B_1 b = \frac{b^* B_2 b}{b^* b}\,\frac{c^* B_2 c}{c^* c}. \quad (29)$$

Eqns. (26) – (29) show that $l \leq 3$*. From the assumptions on (q^*, A) we know that l_3 and r_3 are linearly independent (see Remark 2) and $l = 2$ or 3.

* Rank $(R_1\ R_2\ R_3) = l$ and $R = (R_1\ R_2\ R_3)$ can, for instance, be written by using only the vectors r_1, r_2, r_3.

(i) $l = 2$. Since R_3 is invertible, define $Z_1 = R_3^{-1}R_1$, $Z_2 = R_3^{-1}R_2$. Then the conditions (22) — (24) reduce to (21).

(ii) $l = 3$. We will prove the following in the indicated order:

(a) l_2, l_3, and r_3 are independent vectors in C_3.

(b) There exists a basis such that

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & & \\ v_{31} & A & \end{bmatrix}, \qquad R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}, \qquad v^* = (q_0 \; q^*)$$

where I_2 is the 2×2 identity matrix and q_6 is a scalar.

(c) The eigenvalues of V equal the eigenvalues of A, i.e., v_{11} is an eigenvalue of A.

(d) There exists a transformation S such that

$$SVS^{-1} = \operatorname{diag}(v_{11}, A), v^*S^{-1} = (0 \; q^*) \text{ and } SR = \begin{bmatrix} \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ Z_1 & Z_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

where Z_1, Z_2 are 2×2 matrices. The proof of the lemma then follows that of (i).

To show (a) we claim that $c^*B_2c \neq 0$. If $c^*B_2c = 0$ then (26) — (29) yield $l_2 = 0$, $l_3 = \delta r_1 \left(\delta = -\frac{c^*B_1c}{(c^*c)\,(b^*b)}\right)$, $c^*B_1b = 0$ and $R_1 = r_1c^*, R_2 = r_2c^*$ $R_3 = \delta r_1b^* + r_3c^*$. Now postmultiply (23) by b, c, respectively and use the independence of r_1, r_2, r_3 ($l = 3$) to obtain

$$c^*B_2b = 0, \quad c^*Ab = 0, \quad \delta b^*B_1b = 0, \quad \delta b^*B_2b = 0$$

and

$$\begin{aligned} (c^*c)\, Vr_1 &= (c^*Ac + \delta b^*B_2c)\, r_1 + (c^*B_1c)\, r_2 \\ (c^*c)\, Vr_2 &= \delta(b^*B_1c)\, r_1 + (c^*Ac)\, r_2 + (c^*B_1c)\, r_3 \\ (c^*c)\, Vr_3 &= \delta(b^*Ac)\, r_1 \qquad\qquad + (c^*Ac)\, r_3 \\ \delta(b^*b)\, Vr_1 &= \delta(b^*Ab)\, r_1. \end{aligned}$$

Use the two expressions for Vr_1 to obtain $c^*B_1c = 0$. With $c^*B_1c = 0$, $\delta = 0$ and $Vr_j = \mu r_j$ where $\mu = c^*Ac/c^*c$ and $j = 1, 2, 3$. Hence, $e^{Vh}r_j = e^{\mu h}r_j$. Using (24), $v^*e^{Vh}\, R_1 = 0$ implies $v^*R_1 = 0$ which implies $v^*e^{Vh}R_2 = 0$, etc., until $v^*R_3 = q^* = 0$, a contradiction. Then $c^*B_2c \neq 0$ and (27) — (28) show that l_2, l_3, r_3 are independent.

Part (b) follows since R_3 is of rank 2; there exists a transformation such that $\hat{S}R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ Then the n.a.s.c. of Theorem B yield the claimed forms of V and v. In the following we shall assume this transformation has been performed.

We now prove (c) From $c^*B_2b = 0$ there exist scalars α, β such that $c^*B_2 = \alpha c^*$, $B_2b = \beta b$. From (a) $\alpha \neq 0$, and from (25) and (29), we obtain $\alpha + \beta = 0$. Indeed, (25) gives $(\alpha + \beta)\, q^*B_3 = 0$, hence $\alpha + \beta = 0$ or $q^*B_3 = 0$.

If $q^* B_3 = 0$ then q^* is collinear to c^* and the last equality in (25) gives $c^* B_1 b + \alpha^2 = 0$, and using (29) we get $\alpha(\alpha + \beta) = 0$.

For the rest of this proof and without loss of generality, we take l_2, l_3, r_3 for a basis in C^3, then since $R_3 = l_3 b^* + r_3 c^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ we must have $b^* = (1\ 0)$, $c^* = (0\ 1)$. From (27) – (29) we have

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\alpha^{-1} l_2 \\ r_2 &= -\gamma\alpha^{-1} l_2 - \alpha^{-1} l_3 \\ \gamma &= b^* B_2 c - \alpha^{-1} c^* B_1 c \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

where

Take the first equation of (23), replace in it R_1, R_2, R_3 from (26), multiply by c, use (30) to obtain the first column of V (in the basis l_2, l_3, r_3) as

$$v_{1\,1} = c^* A c - \alpha b^* B_1 c + \gamma c^* B_1 c \tag{31}$$

$$v_{2\,1} = -\alpha\gamma \tag{32}$$

$$v_{3\,1} = -\alpha^2. \tag{33}$$

Take the second equation of (23), replace in it R_1, R_2, R_3 from (26), multiply by b, use (30) and obtain

$$v_{1\,1} = b^* A b - \gamma\alpha^{-1} c^* A b \qquad v_{2\,1} = b^* B_1 b - \alpha^{-1} c^* A b. \tag{34}$$

Multiply the same second equation by c, use (30) and the last equation of (23) to get

$$\gamma v_{1\,1} = \gamma c^* A c - \alpha b^* A c \tag{35}$$

$$\gamma v_{2\,1} = c^* A c - \alpha b^* B_1 c - b^* A b \tag{36}$$

$$\gamma v_{3\,1} = -(c^* A b + \alpha c^* B_1 c). \tag{37}$$

From these relations we get

$$b^* B_1 b - \alpha^{-1} c^* A b + \alpha\gamma = 0$$

$$\alpha b^* A c - \alpha\gamma b^* B_1 c + \gamma^2 c^* B_1 c = 0.$$

Using (31) and (34), we have

$$\begin{aligned} &(v_{1\,1} - b^* A b)(v_{1\,1} - c^* A c) - (b^* A c)(c^* A b) = \\ &= -c^* A b \gamma\alpha^{-1}(\gamma c^* B_1 c - \alpha b^* B_1 c) - (b^* A c)(c^* A b) = \\ &= -c^* A b \alpha^{-1}(\gamma^2 c^* B_1 c - \alpha\gamma b^* B_1 c + \alpha b^* A c) = 0, \end{aligned}$$

and recalling that $b^* = (1\ 0)$, $c^* = (0\ 1)$ in the basis in which we are working, we deduce that $v_{1\,1}$ is an eigenvalue of A.

For (d) let

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \\ \alpha_2 & I_2 & \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} v_{2\,1} \\ v_{3\,1} \end{bmatrix}$$

Then S will transform V to the desired form if

$$\text{rank } (v_{11}I - A\ d) = 1 \text{ and rank} \begin{bmatrix} v_{11}I - A \\ q^* \end{bmatrix} = 2.$$

Since $v_{3\,1}(bA^*b - v_{11}) - v_{21}c^*Ab = -\alpha^2(\alpha^{-1}\gamma c^*Ab) - (-\alpha\gamma)\, c^*Ab = 0$, the first condition is verified. If the second condition is not true then there exists a vector $u \neq 0$ such that $(v_{11}\, I - A)u = 0$ and $q^*u = 0$. These imply $q^*Au = 0$ and with (q^*, A) completely observable, $u = 0$. Q.E.D.

Remark 5. From (26) – (28), we see that the necessary form of Z_1, Z_2 is

$$Z_1 = rc^*, \quad Z_2 = ac^* + rd^*$$

for the 2-vectors a,c,d,r.

Remark 6. $n = 2$, (q^*, A) completely observable, and (S_3) p.d. at $3h$ imply q^* and q^*e^{Ah} are independent. If not, then Lemma 2 and Lemma 1 imply $q^*Z_1 = 0$, $q^*Z_2 = 0$ and $q^*e^{Ah} = 0$. Since e^{Ah} is always invertible, $q^* = 0$.

LEMMA 3. *Let the triple* (A, q, h) *ne given where* A *is of order* n, q *a nonzero* n*-vector, and* h *a positive scalar. Let the nonzero* n*-vectors* a, c, d, r *satisfy*

$$\left.\begin{array}{l} q^*e^{Ah}r = 0,\ q^*e^{Ah}a = q^*r,\ q^*e^{Ah} = (q^*a)\, c^* + (q^*r)\, d^* \text{ and } q^*r \neq 0. \\ \textit{Define} \\ \qquad\qquad Z_1 = rc^*, \quad Z_2 = ac^* + rd^* \\ B_1 = AZ_2 - Z_2A,\ B_2 = AZ_1 - Z_1A - Z_2B_1,\ B_3 = -Z_1B_1 - Z_2B_2. \end{array}\right\} \quad (38)$$

If

$$\begin{aligned} &c^*[(AZ_1 - Z_1A)\ c^*a - ((c^*a)Z_2 - (c^*r)\, I)\,(AZ_2 - Z_2A)] \\ &\quad + d^*[(AZ_1 - Z_1A) - Z_2(AZ_2 - Z_2A)]\, c^*r = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

then (S_3) *is p.d. with respect to* q *at* $3h$.

Proof. We will show that the above assumptions imply the hypothesis of Lemma 1. We have $q^*e^{Ah}Z_1 = q^*e^{Ah}rc^* = 0$, $q^*e^{Ah}Z_2 = q^*e^{Ah}(ac^* + rd^*) = q^*rc^* = q^*Z_1$, and $q^*e^{Ah} = (q^*a)\, c^* + (q^*r)\, d^* = q^*Z_2$. Also

$$c^*B_3 = -c^*Z_1B_1 - c^*Z_2B_2 = -(c^*a)\, c^*B_2 - (c^*r)\,(c^*B_1 + d^*B_2)$$

and

$$\begin{aligned} Z_1B_2 + Z_2B_3 &= rc^*B_2 - (ac^* + rd^*)\,[rc^*B_1 + (ac^* + rd^*)\, B_2] = \\ &= r[(1 - d^*a)\, c^*B_2 - d^*r(c^*B_1 + d^*B_2)] + ac^*B_3. \end{aligned}$$

The proof will be complete if the following vector relations are valid:

$$(c^*a)\, c^*B_2 + (c^*r)\,(c^*B_1 + d^*B_2) = 0 \quad (40)$$

$$(1 - d^*a)\, c^*B_2 - (d^*r)\,(c^*B_1 + d^*B_2) = 0. \quad (41)$$

If we substitute the definitions of B_1 and B_2 in (40) then this reduces to the expression (39). From (38), $q^*a(c^*r) + q^*r(d^*r) = 0$ and $q^*r(1 - d^*a) = q^*a(c^*a)$. Since $q^*r = 0$ we satisfy (41).

Note: In Lemma 3, if $n = 2$, $q^*r \neq 0$ is always true. For $n > 2$, $q^*r = 0$ will imply from (41) a condition similar to (39) and this would imply (40). Also, for $n > 2$ the condition (39) will be satisfied il we let $c^*a = c^*r = 0$ and $q^*r = 1$, and if q^* and q^*e^{Ah} are independent. In this case one may also select $d^* = q^*e^{Ah}$.

By using the vectors q^* and q^*e^{Ah} as base vectors, we can give a detailed investigation of (39) and its consequences when $n = 2$.

THEOREM 2. *Let $n = 2$ and (q^*, A) be completely observable. Then*

(i) *Eqns.* (38) *and* (39) *have solutions an d there exists a B such that (S_3) is p.d. with respect to q at $3h$.*

(ii) *The construction in (i) contains two parameters.*

(iii) *If A and q are real then a real B may be constructed only if A has real eigenvalues.**

Proof. (i) From Remark 6, q^* and q^*e^{Ah} are independent. Make a change of variables in (S_3) by letting $\tilde{x} = \binom{q^*}{q^*e^{Ah}} x$ and denote the transformed system as $(\tilde{S}_3) : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1\tilde{x}(t-h) + \tilde{B}_2\tilde{x}(t-2h) + \tilde{B}_3\tilde{x}(t-3h)$, with $\tilde{q} = e_1^* = (1\,0)$, $\tilde{q}^*e^{\tilde{A}h} = e_2^* = (0\ 1)$. In this basis, define

$$\tilde{r} = \rho e_1, \quad \tilde{a} = \delta e_1 + \rho e_2, \quad \tilde{c}^* = \alpha e_1^* + \beta e_2^*, \quad \tilde{d} = \rho^{-1}(-\delta\tilde{c}^* + e_2^*) \tag{42}$$

where $\rho \neq 0$, α, β, and δ are scalars. Define $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ and $\tilde{B}$ as in Lemma 3 so that (38) is satisfied. Eqn. (39) reduces to the following scalar equation after a postmultiplication by e_1 and e_2:

$$\beta^2\rho^2[(\tilde{a}_{21}\beta^2 - \tilde{a}_{12}\alpha^2) + \alpha\beta(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})] + \beta\rho\,[\alpha^2(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22}) + 2\alpha\beta\tilde{a}_{21}] + \alpha^2\tilde{a}_{21} = 0 \tag{43}$$

where $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$.

We now investigate the existence of solutions of (43). First observe that $\tilde{a}_{21} = 0$ makes $\tilde{A}$ a triangular matrix and $\tilde{q}^* = e_1^*$, $\tilde{q}^*e^{\tilde{A}h} = e_2^*$ are incompatible so that we may always assume $\tilde{a}_{21} \neq 0$. If $\alpha = 0$ then $\beta = 0$, $\tilde{c} = 0$, and $\tilde{Z}_1 = 0$. This reduces to the case when $m = 2$ and will be excluded from further discussion. A similar remark can be made for $\beta = 0$. Further, the quadratic equation (43) for $\beta\rho$ will not have a solution if both of the leading coefficients are zero. If this occurs, then

$$\beta = -\frac{\alpha(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})}{2\tilde{a}_{21}} \tag{44}$$

and $$(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})^2 + 4\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} = \mathrm{tr}^2(A) - 4\ \det\ (A) = 0.$$

* Equivalently: a *real* system (S_3) with A having complex eigenvalues is (for any q such that (q^*, A) is observable) complete ($B_3 \neq 0$!).

Thus, if the eigenvalues of A are equal, then we agree to exclude the straight line in the α, β parameter plane defined by (44). Any other situation yields a solution of (43) and we may use Lemma 3.

(ii) We explicitly calculate $\widetilde{B}$ from (38) and use (43) to find

$$\widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \alpha\rho\widetilde{a}_{12} - \widetilde{a}_{21} & \beta\rho\widetilde{a}_{12} + (\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) \\ -\beta\rho\widetilde{a}_{21} - \alpha\rho(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) & -(\alpha\rho\widetilde{a}_{12} - \widetilde{a}_{21}) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} \alpha\rho(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) & \beta\rho(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) - \widetilde{a}_{21} \\ \rho^2[(\widetilde{a}_{12}\beta^2 - \widetilde{a}_{12}\alpha^2) + \alpha\beta(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22})] + 2\alpha\rho\widetilde{a}_{21} & -\alpha\rho(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}), \end{bmatrix},$$

and

$$\widetilde{B}_3 = \rho\widetilde{a}_{21} \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \dfrac{\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}$$

Note that neither $\widetilde{B}$ nor Eqn. (43) depend on δ, hence we have three parameters which are subject to the constraint Eqn. (43).

(iii) Consider first the case when the leading coefficient of Eqn. (43) is zero, i.e.,

$$\widetilde{a}_{21}\beta^2 + \beta\alpha(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) - \widetilde{a}_{12}\alpha^2 = 0.$$

Since $\widetilde{a}_{21} \neq 0$, we find

$$\beta = \frac{-\alpha(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) \pm \alpha\sqrt{(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22})^2 + 4\widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{21}}}{2\widetilde{a}_{21}} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\widetilde{a}_{21}}[-(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2(A) - 4\det(A)}]$$

and

$$\rho\beta = \frac{-\alpha^2\widetilde{a}_{21}}{\alpha^2(\widetilde{a}_{21} - \widetilde{a}_{22}) + 2\alpha\beta\widetilde{a}_{21}} = \pm\frac{\widetilde{a}_{21}}{\sqrt{\mathrm{tr}^2(A) - 4det(A)}}.$$

When the leading coefficient of Eqn. (43) is not zero, we find

$$\rho\beta = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) + 2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\widetilde{a}_{21} \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2(A) - 4\det(A)}}{2\left(\widetilde{a}_{21} - \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2\widetilde{a}_{12}\right) + 2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)(\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22})}.$$

Using the expressions of $\widetilde{B}$ from (ii) we conclude that A, B real imply $\rho\beta$ and $\dfrac{\alpha}{\beta}$ real. Hence $\mathrm{tr}^2(A) - 4\det(A) \geq 0$ and the eigenvalues of A are real. Q.E.D.

Example 2. (Equal eigenvalues).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q^* = (1 \quad -1), \quad h = 1.$$

We find $q^* e^{Ah} = (0 \quad -1)$ and $S = S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

In the $(\widetilde{S}_3)$ system $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ and Eqn. (43) becomes

$$\beta^2 \rho^2 (\alpha + \beta)^2 + \beta \rho 2\alpha(\alpha + \beta) + \alpha^2 = 0.$$

From this last equation, we conclude that $\alpha + \beta \neq 0$ (see Eqn. (44)) and $\rho\beta = -\dfrac{\alpha}{(\alpha + \beta)}$. Using (ii) we have

$$\widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \alpha\rho + 1 & \beta\rho - 2 \\ \rho(\beta + 2\alpha) & -(\alpha\rho + 1) \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2\alpha\rho & -2\beta\rho + 1 \\ -\rho^2[(\beta^2 + \alpha^2) + 2\alpha\beta] - 2\alpha\rho & 2\alpha\rho \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_3 = -\rho \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \dfrac{\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}.$$

In the original variables we have

$$B_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{a + \beta}{\beta} & 0 \\ \dfrac{\alpha(\beta + 2\alpha)}{\beta(\alpha + \beta)} & -\dfrac{\alpha + \beta}{\beta} \end{bmatrix} \qquad B_2 = \frac{1}{\beta^2} \begin{bmatrix} \alpha^2 & -(\alpha + \beta)^2 \\ \dfrac{\alpha^2(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} & -\alpha^2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \frac{\alpha}{\beta(\alpha + \beta)} \begin{bmatrix} \dfrac{-\alpha(\alpha + \beta)}{\beta} & \dfrac{(\alpha + \beta)^2}{\beta} \\ \dfrac{-\alpha^2}{\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Example 3. (Complex eigenvalues).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q^* = (1 \ 0), \quad h = \frac{\pi}{2}, \text{ and } q^* e^{Ah} = (0 \ 1).$$

The eigenvalues of A are $\pm$ i and Eqn. (43) becomes

$$\beta^2 \rho^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \beta\rho(2\alpha\beta) + \alpha^2 = 0$$

or

$$\rho\beta = \frac{-\frac{\beta}{\alpha} \pm i}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \qquad \text{for } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

From (ii)

$$B_1 = \begin{bmatrix} \alpha\rho + 1 & \beta\rho \\ \beta\rho & -(\alpha\rho + 1) \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\rho & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = -\rho \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Since $\rho\beta$, $\rho\alpha$, and $\frac{\alpha}{\alpha}$ cannot all be real, it is impossible for B to be real.

Exemple 4. ((q^*, A) nonobservable). For $A = \mu I$, μ a scalar, the pair (q^*, A) is not observable and the construction theorem is not applicable. However, (ii — c) of Lemma 2 does not depend on the observability property and from Eqns. (31) — (37) we can determine the necessary structure of B and V. The conditions $v^* e^{Vh} R_1 = 0$, $v^* e^{Vh} R_2 = v^* R_1$, $v^* e^{Vh} R_3 = v^* R_2$, and $v^* R_3 = q^*$ may then be used to determine v^*. We thus find that

$$\widetilde{A} = \mu I, \quad \widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha\gamma & \gamma^2 \\ -\alpha^2 & \alpha\gamma \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\gamma \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ -\alpha\gamma & \mu & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad e^{Vh} = e^{\mu h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha\gamma h & 1 & 0 \\ -\alpha^2 h & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v^* = (q_1 e^{\mu h}, q_1, q_2)$$

$$R = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0 & -\frac{1}{\alpha} & 1 & -\frac{\gamma}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

where $\alpha = -h^{-1} e^{2\mu h}$, $\gamma = e^{-\mu h}\left(\frac{q_2 e^{3\mu h}}{q_1 h} - 1\right)$ satisfy the hypothesis of Theorem B. It is also easy to verify that $q_1 \neq 0$. If we make a change of variables, then $\widetilde{A} = SAS^{-1} = A$ and $q^* S = q^*$ provided that S^{-1} exists. Hence if $S = \begin{bmatrix} \frac{q_1 - q_2\widetilde{\alpha}}{q_1} & \frac{q_2(1 - \widetilde{\beta})}{q_1} \\ \widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta} \end{bmatrix}$ and $\widetilde{\alpha} q_2 \neq q_1 \widetilde{\beta}$,

then B may be constructed with the two parameters $\tilde{\alpha}$ $\tilde{\beta}$. Note further that $v^* e^{Vh} = e^{\mu h}(0 \quad q^*)$.

Example 5. ($A = 0$). In Example 4, let $\mu = 0$, $\gamma = 0$, $h = 1$, $\alpha = -$ $- 1$, $q^* = (1 \ 1)$ to find

$$A = 0, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REFERENCES

1. **B. A. Asner** and **A. Halanay,** Delay-feedback solution for the minimal-time linear problem with several outputs, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliqués* TOME XVIII, No. 2, Bucharest (1973) 295–296.
2. **B. A. Asner** and **A. Halanay** Non controllability of time-invariant linear systems using one-dimensional linear delay feedback, *Revue Roumaine des Sciences Techniques Serie Electrotechnique et Energétique,* T18,2(1973) 283-291.
3. **B. A. Asner** and **A. Halanay,** Algebraic Theory of Pointwise Degenerate Delay-Differential Systems, *J. Differential Equations,* T. 14, (1973).
4. **P. Charrier,** *Equations differentielles avec retard*: applications de la degenerescence a la theori-de la commande, Ph. D. dissertation, l'Universite de Bordeaux (1972).
5. **A. K. Choudhury,** Algebraic and transfer-function criteria of fixed-time controllability of delay-differential systems, *International J. Control,* 16, 6 (1972) 1073–1082.
6. **A. K. Choudhury,** *Necessary and sufficient conditions of pointwisse completeness of linear time-invariant delay-differential systems,* Ibid, 1083–1100.
7. **F. Kappel,** *Some remarks to the problem of degeneracy for functional differential e quations,* Equadiff 1973 Hermann Paris.
8. **D. Henry,** Small solutions of linear autonomous functional differential equations, *J. Diffe rential Equations,* 8, 3 (1970).
9. **V. M. Popov,** Pointwise degeneracy of linear, time-invariant, delay-differential equations *J. Differential Equations,* 11 (1972) 541–561.
10. **Vl Ml Popov,** Delay-feedback, time-optimal, linear time-invariant control systems, *„Ordinary Diferential Equations,* 1971 *NRL-MRC Conference,"*, Academic Press, New York (1972).
11. **L. Weiss,** On the controllability of delay-differential systems, *SIAM J. Control,* 5 (1967) 575–587.
12. **R. B. Zmood** and **N. H. McClamroch,** On the pointwise competeness of differential-difference equations, *J. Differential Equations,* 12 (1972) 474–486.
13. **A. M. Zverkin,** *Conference of the University of Friendship of Peoples,* Moscow, May 24–27 (1971).

Received on 22.V.1973

Institute of Mathematics, Academy of the Socialist Republic of Romania;
University of Bucharest, Faculty of Mathematics.

VARIABILE SLAB CORELATE IDENTIC REPARTIZATE CU MOMENTE DE PRIM ORDIN INFINITE

A. BACIU

În lucrarea „Legea numerelor mari pentru variabile slab corelate" [1] se introduce noţiunea de variabile slab corelate precum şi noţiunea de variabile aleatoare ce satisfac condiţia (C)

Un şir de variabile aleatoare X_i, $i \in N^+$ definite pe cîmpul de probabilitate $(E, \mathfrak{K}, P)$ care satisfac relaţia:

$$\sup \frac{D^2\left(\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} D^2(I_{Ai} X_i)} = c < \infty$$

se numesc variabile slab corelate.

$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$,$D^2(X)$ — este dispersia variabilei aleatoare X, iar $I_{Ai} X_i$ este variabila truncheată a variabilei X_i; $A = \{(-a, a),\ a \in R\}$

În lucrarea „O teoremă -0—1 pentru o clasă de variabile aleatoare" [2] se definesc variabile aleatoare care satisfac o condiţie mai restrictivă, denumită condiţia (C):

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{I_{Bi}}{P(Bi)}\right) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} D^2\left(\frac{I_{Bi}}{P(Bi)}\right)$$

unde $B_i = \{|X_i| > a_i\}$ $i = 1, 2, \ldots$ $\{a_n\}_{n \in N^+}$ este un şir de numere reale pozitive cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$

Pentru variabile aleatoare independente W. Feller [6], Y Chow şi M. Robbins [4] dau o serie de proprietăţi în ipoteza de identic repartizare şi de existenţă a momentelor de prim ordin infinite.

Variabilele aleatoare slab corelate nu au multe din proprietăţile utilizate de autorii de mai sus citaţi, dar au o serie de proprietăţi importante.

Lema 1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate cu $M(|X|) = \infty$ slab corelate şi un şir de numere reale $\{a_n\}_{n \in N^+}$ cu $a = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ care satisfac condiţia (C), atunci

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 P\{|X_n| > a_n\}} < \infty \text{ implică}$$

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_n|}{a_n} = \infty\right\} = 1$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} < \infty \text{ implică}$$

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} = 0\right\} = 1$$

Demonstraţie. Întrucît şirul de numere reale $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n \in N^+}$ este evident un şir nedescrescător, avem:

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{2n}}{2n} \leqslant \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$

De aici deducem $2a_n \leqslant a_{2n} \leqslant a_{2n+1}$
Presupunem întîi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| > a_n\}} < \infty$$

Atunci, fie

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 P\{|X_n| > a_{2n}\}} < \infty$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 P\{|X_n\} > a_{2n+1}\}} < \infty$$

Dacă (i) este adevărată, din prima inegalitate a lui (1) avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 P\{|X_n| > 2a_n\}} < \infty \tag{2}$$

Dacă (ii) este adevărată, din a doua inegalitate (1) se vede că (i) de asemenea este valabilă, deci inegalitatea (2) este adevărată în orice caz.
Cu alte cuvinte

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| > a_n\}} < \infty$$

implică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 P\{|X_n| > 2a_n\}} < \infty$$

De aici, prin inducţie asupra lui $k = 1, 2, \ldots$ se poate deduce că (a) implică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X| > 2^k a_n\}} < \infty \tag{3}$$

Această ultimă relaţie (3) implică conform teoremei * din [2] că:

$$P\left\{\frac{|X_n|}{a_n} > 2^k \text{ de o infinitate de ori}\right\} = 1.$$

Deci, deoarece k este arbitrar

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|X_n|}{a_n} = \infty\right\} = 1$$

şi prima parte a lemei a fost demonstrată.

Pentru a demonstra cea de a doua parte a lemei presupunem prin absurd că:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} = 0\right\} < 1$$

(În ipotezele considerate, legea 0 — 1 nu este implicată, deci nu putem presupune că:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} = 0\right\} = 0\Big)$$

Presupunerea făcută ne conduce la concluzia că există un k întreg şi pozitiv pentru care:

$$P\left\{\frac{|X_n|}{a_n} > \frac{1}{2^k} \text{ de o infinitate de ori}\right\} > 0$$

---

* „Fie un şir de variabile aleatoare care satisfac condiţia (C). Atunci dacă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P(B_n)} < \infty$$

avem

$$P\{\lim_{n\to\infty} \sup B_n\} = 1$$

ceea ce din teorema lui Borel-Cantelli, conduce la divergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|X_n| > \frac{a_n}{2^k}\right\} = \infty$$

Din relaţiile:

$$\frac{2a_n}{2^k} \leqslant \frac{a_{2n}}{2^k} \leqslant \frac{a_{2n+1}}{2^k}$$

se poate deduce că cel puţin una din următoarele serii diverg

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|X_n| > \frac{a_{2n}}{2^k}\right\}$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|X_n| > \frac{a_{2n+1}}{2^k}\right\}$$

Din divergenţa primei serii ar rezulta că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|X_n| > \frac{a_n}{2^{k-1}}\right\} = \infty \tag{4}$$

iar din divergenţa celei de-a doua serii se observă că rezultă aceeaşi proprietate (4).

Prin inducţie asupra lui $k = 1, 2, \ldots.$ se ajunge la concluzia că

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} = \infty$$

Cea de-a doua parte fiind adevărată, lema este demonstrată.

Lema 2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots.$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate cu $M(|X|) = \infty$, slab corelate şi un şir de numere pozitive $\{a_n\}_{n \in N^+}$ cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ care satisfac condiţia (C). Atunci

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| > a_n\}} < \infty \text{ implică}$$

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{a_n} = \infty\right\} = 1$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} < \infty \text{ implică}$$

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = 0\right\} = 1$$

Unde $S_n = X_1 + \ldots. + X_n$

Demonstrație. Pentru demonstrarea primei părți presupunem că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} = \infty$$

proprietate care este evident implicată de ipoteza (a).

Din lema 1 de mai sus obținem:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|X_n|}{a_n} = \infty\right\} = 1.$$

Presupunem prin absurd că

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{a_n} = \infty\right\} < 1.$$

În acest caz va exista o constantă pozitivă c astfel încît

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{a_n} < c\right\} > 1$$

și prin urmare probabilitarea ca șirul de variabile aleatoare $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}_{n\in N^+}$ să fie mărginit ar fi diferită de zero.

Dar, deoarece

$$\frac{|X_n|}{a_n} = \frac{|S_n - S_{n-1}|}{a_n} \leqslant \frac{|S_n|}{a_n} + \frac{|S_{n-1}|}{a_n} \leqslant \frac{|S_n|}{a_n} + \frac{|S_{n-1}|}{a_{n-1}}$$

ceea ce ar conduce la concluzia că și probabilitatea ca șirul de variabile aleatoare $\left\{\frac{|X_n|}{a_n}\right\}_{n\in N^+}$ să fie mărginit, este diferită de zero.

Am ajuns la o contradicție, prima parte a lemei este deci demonstrată.

A doua parte a lemei observăm că este o consecință a teoremei * din [3]

Din cele două leme de mai sus deducem imediat următoare teoremă.

* „Fie un șir de variabile aleatoare care satisfac condiția (C). Dacă

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X| \, dF(X) = \infty$$

atunci $P\{|S_n| > a_n$ de o infinitate de ori$\}$ este zero sau unu după cum:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geqslant a_n\} < \infty$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| \geqslant a_n\}} < \infty$$

Teorema 1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate cu $M(|X_k|) = \infty$ slab corelate şi $\{a_n\}_{n \in N^+}$ un şir de numere pozitive cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ care satisfac condiţia (C).
Atunci în ipoteza că sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} < \infty \tag{5}$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| > a_n\} < \infty} < \infty \tag{6}$$

avem

(a) $$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|X_n|}{a_n} < \infty\right\} > 0 \text{ implică}$$

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{Sn}{a_n} = 0\right\} = 1$$

(b) $$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|X_n|}{a_n} < \infty\right\} = 0 \text{ implică}$$

$$P\left\{\lim_{u\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{a_n} < \infty\right\} = 0.$$

Demonstraţia teoremei este o consecinţă imediată a celor două leme de mai sus.

Teorema 2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repratizate cu $M(X_k) = \infty$ slab corelate şi $\{a_n\}_{n \in N^+}$ un şir de numere pozitive cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ care satisfac condiţia (C).
În ipoteza că $\{a_n\}_{n \in N^+}$ satisfac una din condiţiile

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} < \infty$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|X_n| > a_n\}} < \infty$$

una din următoarele alternative au loc:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \inf \frac{|S_n|}{a_n} = 0\right\} = 1 \tag{7}$$

sau

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{a_n} = \infty\right\} = 1 \tag{8}$$

Demonstrație. Să presupunem că teorema ar fi falsă. În acest caz există un șir de constante $\{a_n\}_{n\in N^+}$ și $M(|X|) = \infty$ astfel că:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \inf \left|\frac{S_n}{a_n}\right| > 0\right\} > 0$$

și

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{S_n}{a_n}\right| < \infty\right\} > 0 \tag{9}$$

Să presupunem întîi că $\delta = 0$ deci $a_n = n$
Din (9) rezultă că

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{n} < \infty\right\} > 0$$

Din lema 2 prima parte (a) pentru $a_n = n$ rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > n\} < \infty$$

sau

$$M(|X|) < \infty$$

ceea ce contrazice presupunerea făcută că $M(|X|) = \infty$. Deci acest caz este imposibil.

Să presupunem că $\delta = 0$ și să construim șirul de numere reale

$$\alpha_n = n \max\left[\frac{|a_1|}{1}, \frac{|a_2|}{2}, \ldots, \frac{|a_n|}{n}\right] \geqslant |a_n| \geqslant 0.$$

Atunci șirul $\left\{\frac{\alpha_n}{n}\right\}_{n\in N^+}$ este pozitiv și nedescrescător și deci va exista un șir de întregi $n_1 < n_2 < \ldots$ astfel ca

$$\alpha_{n_k} = |a_{n_k}|$$

Din (9) rezultă că

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{\alpha_n} < \infty\right\} > 0 \tag{10}$$

Și de aici din teorema 1

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\alpha_n} = 0\right\} = 1 \tag{11}$$

Din (10) şi (11) rezultă că:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \inf \left|\frac{S_n}{a}\right| = 0\right\} = 1$$

în condradicţie cu (9).

Astfel şi acest caz este imposibil.

Demonstraţia teoremei este completă.

Corolar Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare, identic repartizate cu $M(|X|) = \infty$, slab corelate şi care satisfac condiţia (C), pentru orice şir de constante $\{a_n\}_{n\in N^+}$ pozitive, atunci:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{a} = 1\right\} = 0 \tag{12}$$

Teorema 3. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate slab corelate pentru care

$$M(X^+) = \infty \text{ şi } M(X^- \log X^-) < \infty \tag{13}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty \tag{14}$$

cu probabilitate egală cu unu.

Demonstraţie. Dacă considerăm truncheatele acestor variabile aleatoare

$$X_n^c = \begin{cases} X_n & \text{pentru } X_n < c \\ 0 & \text{pentru } X_n \geqslant c \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Atunci din legea numerelor mari (Teorema 1[1]) obţinem:

$$\frac{X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c}{n}$$

converge aproape sigur către $M(X_1^c)$.

Din ipoteza făcută se poate vedea imediat că

$$\lim_{c\to\infty} M(X_1^c) = M(X_1^c) = \infty$$

şi deci se obţine (14),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty$$

cu probabilitatea unu.

Teorema 4. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate, slab corelate pentru care

$$M(X^-) = \infty \quad \text{şi} \quad M(X_1^+ \log X_1^+) < \infty. \tag{15}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty \tag{16}$$

cu probabilitate egală cu unu.

Demonstraţie. Se ştie că convergenţa aproape sigură are loc în condiţii mai restrictive decît convergenţa în probabilitate.

În particular, în cazul sumelor de variabile aleatoare independente există numeroase exemple în care $\frac{S_n}{a_n}$ converge către zero, iar $\frac{S_n}{a_n}$ nu converge aproape sigur.

($S_n = X_1 + \ldots + X_n$, iar $\{a_n\}_{n\in N^+}$ este un şir de numere reale pozitive cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$)

De exemplu, în cazul particular al variabilelor aleatoare identic repartizate cu dispersie finită se poate vedea uşor că

$$\frac{S_n}{(n \log \log n)^{1/2}}$$

converge în probabilitate către zero.

Din legea logaritmului iterat se obţine că

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(n \log \log n)^{1/2}} = 1 \tag{17}$$

În cele ce urmează ne vom situa în ipoteza că $\frac{S_n}{n}$ converge în probabilitate către zero, dar că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left\{\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right\} = \infty$$

(adică presupunem că viteza de convergenţă către zero a mărimii

$P\left\{\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right\}$ este mai slabă decît, de exemplu, $\log^{1-\delta} n$).

Obţinem teorema:

Teorema 5. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare identic repartizate slab corelate care satisfac condiţia (C) cu $a_n = n$ astfel încît $\frac{S_n}{n}$ converge către zero în probabilitate, iar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{|S_n| > n\varepsilon\} < \infty \tag{18}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S_n}{n} = +\infty \tag{19}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{S_n}{n} = -\infty \tag{20}$$

cu probabilitate unu.

Demonstrație. Din teorema 4 se poate deduce că dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{|S_n| > n\varepsilon\} = \infty$$

atunci vom avea $M(|X_k|) = \infty$

În ipotezele de mai sus aplicînd acum teorema 1 avem cu probabilitate unu

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|S_n|}{n} = \infty.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S_n}{n} = \infty$$

cu probabilitate egală cu unu.

Într-adevăr, dacă nu ar fi așa, am avea

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S_n}{n} = -\infty$$

pe o mulțime B de probabilitate pozitivă.

Dar după cum se poate constata cu ușurință pe această mulțime B am avea de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty$$

pentru orice $\omega \in B$. Acest fapt contrazice presupunerea făcută cu privire la convergența în probabilitate către zero a lui $\frac{S_n}{n}$.

Teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

[1] — **Baciu A.** — *Legea numerelor mari pentru variabile slab corelate* — Analele Univ. Buc. Anul XXX nr. pag. 8—17 (1971)

[2] — **Baciu, A.** — *O teoremă* (0—1) *pentru o clasă de variabile aleatoare* — Analele Univ. Buc. Anul XX nr. pag. 19—22 (1971)

[3] — **Baciu, A.** — *O clasă de variabile aleatoare dependente cu valoarea medie infinită* — Analele Univ. Buc. Anul XXI (1972)

[4] — **Chow, Y.** — **Robbins, M.** *On sums of independent random variables with infinite moments and „fair" games* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47 p. 330—335 (1961)

[5] — **Feller W.** — *On introduction te probability theory and its application Vol. I* New York (1946)

[6] — **Feller, W.** — *A limit theorem for random variables with infinite moments* — Amer. Journ. of Math. p. 257—261 (1946)

[7] — **Loève, M.** — *Probability Theory* — Van Nostrand, New York, (1960)

[8] — **Révesz, P.** — *The laws of large numbers.* Akadémiai Kiado Budapest (1967).

Primită la 23 III 1973

VARIABLES ALÉATOIRES FAIBLEMENT CORRELÉES IDENTIQUEMENT REPARTIES AVEC DES MOMENTS INFINIS DE PREMIER ORDRE

Résumé

Dans les travaux [1] et [2] de la bibliographie on introduit les notions de variables aléatoires faiblement correlées et celles de variables aléatoires qui satisfont la condition(C).

Dans ce travail on démontre une série de propriéetés; quatre théorèmes et deux lemmes auxiliares pour les variables aléatoires faiblement correlées identiqument reparties au moment de premier ordre infini, qui conduisent au théorème suivant.

Théorème. Soit une suite de varibles aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ faiblement correlées, identiquement reparties qui satisfont la condition (C) avec $a_n = n$ et la suite $\frac{S_n}{n}$ $(S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n)$ convergeant en probabilité vers zero; et pour $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{|Sn| > n\varepsilon\} < \infty$$

Dans ces conditions avec une probabilité égale à 1 on a:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Sn}{n} = +\infty$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Sn}{n} = -\infty$$

ASUPRA UNUI MODEL DE AŞTEPTARE CU VENIRI ÎN GRUP DUPĂ LEGEA POISSON ŞI SERVICII DUPĂ LEGEA ERLANG

CĂLINA BARDIUC

În articolul de faţă este tratat un model de aşteptare cu veniri în grup după legea Poisson şi servicii după legea Erlang cu k faze, aşezate în paralel, cu o infinitate de staţii, cazul nestaţionar şi staţionar.

În prima parte a lucrării modelul este studiat pentru parametri constanţi, iar în partea a doua parametrii sînt funcţii de timpul t.

Ideia acestui articol se bazează pe ideia lui Restreppo Rodrigo [6], care tratează un model de aşteptare cu veniri în grup după legea Poisson şi servicii după legea Erlang, cu o singură staţie cu k faze aşezate în succesiune, cu parametri constanţi, caz staţionar.

Cazuri nestaţionare şi staţionare pentru modele de aşteptare cu o infinitate de staţii au fost tratate de diferiţi autori, de pildă; un model de aşteptare cu veniri individuale după legea Poisson şi servicii după legea exponenţială, cu parametri variabili a fost studiat de Hincin [8]; un model cu veniri în grup după legea Poisson şi servicii după legea exponenţială cu parametri constanţi a fost studiat de Gh. Mihoc [5] şi generalizat acest model cu parametri variabili de Gh. Theiler [7].

§ 1. MODEL NESTAŢIONAR CU PARAMETRI CONSTANŢI

În acest paragraf se presupune că:

— venirile au loc în grupe de cel mult r unităţi (r număr natural mai mare ca 1), independente între ele după o lege de repartiţie Poisson de parametru respectiv; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$;

— serviciile sînt individuale, independente, după o lege de repartiţie Erlang de parametru μ, cu k faze egal probabile (k este număr natural mai mare ca 1); fazele sînt aşezate în paralel, adică ordinea de efectuarea fazelor nu este constantă, cu alte cuvinte, o unitate care are de efectuat v faze ($1 \leqslant v \leqslant k$), poate să efectueze una din cele v faze, oricare ar fi ea, apoi a doua fază, fiind una din cele $v - 1$ faze rămase, oricare ar fi ea şi aşa mai departe.

În sistem sînt un număr infinit de staţii, astfel ca fiecare unitate, care vine în sistem, intră într-o staţie unde trebuie să efectueze k faze. Staţia, în

care a intrat o unitate, rămîne ocupată pînă ce unitatea intrată efectuează cele k faze.

Din ipoteze rezultă că:

— probabilitatea ca să sosească i unități, este $\lambda_i \Delta t + 0(\Delta t)$, $(1 \leqslant i \leqslant r)$

— probabilitatea ca o unitate să fie servită complect, este $\mu \Delta t + 0(\Delta t)$;

— probabilitatea că se efectueze o anumită fază, este $k\mu\Delta t + 0(\Delta t)$ și probabilitatea ca să se efectueze una dintre cele s faze ($s = 0, 1, \ldots$), rămase de efectuat pentru toate unitățile din sistem, este $sk\mu\Delta t + 0(\Delta t)$, iar $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Atunci ecuațiile modelului sînt:

$$P_0'(t) = k\mu P_1(t) - \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_0(t)$$

$$P_s'(t) = k\mu(s+1)\, P_{s+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\mu s\right) P_s(t) \qquad s < k$$

$$P_k'(t) = k\mu(k+1)\, P_{k+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\mu k\right) P_k(t) + \lambda_1 P_0(t)$$

$$P_r'(t) = k\mu(s+1)\, P_{s+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\mu s\right) P_s(t) + \sum_{i=1}^{u} \lambda_i P_{s-ki}(t)$$

$$s > k; \quad u = \min\left(r, \left[\frac{s}{k}\right]\right)$$

Aici $P_s(t)$ $(s = 0, 1, \ldots,)$ este probabilitatea ca la momentul $t (t \geqslant 0)$ pentru toate unitățile din sistem mai sînt necesare s faze de efectuat.

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații diferențiale vom folosi funcția generatoare

$$F(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^s P_s(t) \qquad |x| \leqslant 1,$$

care, evident, converge uniform pentru $|x| \leqslant 1$, în raport cu x, respectiv în raport cu t. Deasemenea, fiecare termen fiind derivabil în raport cu x și t, $F(x,t)$ admite derivate parțiale în raport cu x și t, care se obțin derivînd, termen cu termen seria respectivă.

Înmulținînd expresia, care dă derivata $P_s'(t)$ cu x_s și însumînd de la $s = 0$ la infinit și convenind a lua $P_{s-ki} = 0$, pentru $s - ki < 0$, se obține, pentru funcția generatoare ecuația:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + k\mu(x-1)\frac{\partial F}{\partial x} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (x^{ki} - 1) F = 0.$$

Vom rezolva această ecuație folosind metoda reducerii ecuației neomogene la o ecuație omogenă. În acest scop vom face substituia

$$F(x, t) = e^{g(x)} \cdot G(x, t)$$

Înlocuind în ecuaţia (2) obţinem

$$e^{g(x)}\left[\frac{\partial G}{\partial t}+k\mu(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}\right]+e^{g(x)}G\left[[k\mu(x-1)\frac{dg}{dx}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x^{ki}-1)\right]=0.$$

Punînd condiţia

$$k\lambda(x-1)\frac{dg}{dx}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x^{ki}-1)=0,$$

şi integrînd, obţinem pentru $g(x)$ o soluţie particulară,

$$g(x)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_j\left(\frac{x^{ki}-1}{ki}+\frac{x^{ki-1}-1}{ki-1}+\ldots+\frac{x-1}{1}\right).$$

Iar din ecuaţia

$$\frac{\partial G}{\partial t}+k\lambda(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}=0,$$

se obţine soluţia generală

$$G(x,t)=G[(x-1)\,e^{-k\mu t}]$$

Deci

$$2')\qquad F(x,t)=e^{\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left(\frac{x^{ki}-1}{ki}+\frac{x^{ki-1}-1}{ki-1}+\ldots+\frac{x-1}{1}\right)}G[(x-1)\,e^{-k\mu t}].$$

Pentru a obţine expresia precisă a funcţiei generatoare, trebuie ţinut seamă de condiţiile iniţiale, adică de starea sistemului la momentul iniţial.

Dacă la momentul iniţial $t=0$, avem $P_s(0)=a_{s(s=0,1,\ldots)}$ atunci, făcînd $t=0$ în (2'), se obţine

$$F(0,x)=\sum_{s=0}^{\infty}P_s(t)x^s=\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s$$

deci

$$e^{\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\frac{x^{ki}-1}{ki}+\ldots+\frac{x-1}{1}\right]}\cdot G(x-1)=\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s$$

De aici se găseşte expresia lui $G(x-1)$, deci şi a lui $G(z)$, $(z=(x-1)$ şi făcînd apoi $z=(x-1)e^{-k\mu t}$, se găseşte expresia căutată

$$G[(x-1)\,e^{-k\mu t}]=\sum_{s=0}^{\infty}a_s(1+(x-1)\,e^{-k\mu t})^s\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\frac{(1+(x-1)e^{-k\mu t})^{ki}-1}{ki}+\ldots+\frac{1+(x-1)e^{-k\mu t}-1}{1}\right]}$$

prin urmare

3) $$F(t, x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(1 + (x - 1)\, e^{-k\mu t})^s \times$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{k\mu}\sum^{r} \lambda_i \left[\frac{(1+(x-1)e^{-k\mu t})^{ki} - x^{ki}}{ki} + \ldots - \frac{1+(x-1)e^{-k\mu t}}{1}\right]}$$

Dezvoltînd în serie în jurul punctului $x = 0$ se obțin probabilitățile $P_s(t)$ $(s = 0, 1, \ldots)$

$$P_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s\,(1 - e^{-k\mu t})^s \cdot e^{-\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{(1-e^{k\mu t})^{ki}}{ki} + \ldots + \frac{1-e^{k\mu t}}{1}\right]}$$

$$P_1(t) = \left\{ -\sum_{s=0}^{\infty} a_s(1 - e^{-k\mu t})^s \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{(1 - e^{-k\mu t})^{ki-1} + \ldots + 1 - e^{k\mu t}}{k\mu}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\infty} s a_s (1 - e^{-k\mu})^{s-1} \right\} e^{-k\mu t - \frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{(1-e^{-k\mu t})^{ki}}{ki} + \ldots + \frac{1-e^{-k\mu t}}{1}\right]}$$

pentru că

$$P_s(t) = \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial^s F_s}{\partial x^s}\right)_{x=0} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Acum să vedem ce se întîmplă dacă t tinde la infinit. Se observă că dacă s-ar desvolta seria

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(1 + (x - 1)\, e^{-k\mu t})^s$$

după puterile lui x, se obține o serie de forma

4) $$\sum_{s=0}^{\infty} b_s(t)\, x^s,$$

unde toți coeficienții $b_s(t)$ sînt mai mari sau egali cu zero.

Făcînd $x = 0$ se obține

$$b_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(1 - e^{-k\mu})^s$$

prin urmare

$$\lim_{t-\infty} b_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s = 1.$$

Dacă în relaţia

$$\sum_{s=0}^{\infty} b(t)\, x^s = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (1 + (x-1)\, e^{-k\mu t})^s$$

se face $x = 1$, se obţine

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s = 1$$

însă $\lim\limits_{t\to\infty} b_0(t) = 1$ şi $b_s(t) \geqslant 0$, deci $\lim\limits_{t\to\infty} b_s(t) = 0$ pentru $s = 1, \ldots$

Din (3) şi (4) se vede că se poate scrie

$$F(t, x) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s(t)\, x^s = \sum_{s=0}^{\infty} b_s(t)\, x^s \times$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{k\mu}\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{1+(x-1)\, e^{-k\mu t})^{ki} - x^{ki}}{ki} + \ldots + \frac{1+(x-1)\, e^{-k\mu t} - x}{1}\right]}$$

acum păstrînd pe x fix $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ şi făcînd pe $t \to \infty$ se vede imediat că cei doi factori din membrul al doilea tind către limite finite. De aici rezultă

6) $$\lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} P_s(t)\, x^s = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum^{r} \lambda_i \left[\frac{1-x^{ki}}{ki} + \ldots + \frac{1-x}{1}\right]}$$

Această limită se mai poate scrie în felul următor

$$\lim_{t\to\infty} \sum P_s(t)\, x_s = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \ldots + \lambda_r \sum\limits_{r=(r-1)k+1}^{rk} \frac{1}{j}} \times$$

$$\times\, e^{\frac{1}{k\mu}\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x}\, e^{\frac{1}{2k\mu}\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x^2} \ldots e^{\frac{1}{hk\mu}\sum\limits_{i=\left[\frac{h}{k}\right]k=1}^{r}} \ldots e^{\frac{\lambda r}{k^2 r\mu} x^{rk}}$$

De aici se vede că $\lim\limits_{t\to\infty} P_s(t)$ există şi are expresia următoare

$$\lim_{t\to\infty} P_s(t) = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \ldots + r_r \sum\limits_{j=(r-1)k+1}^{rk} \frac{1}{j}} \times$$

$$\times \sum_{v_1+2v_2+\ldots+hv_h=s} \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda i}{jk\mu}\right)^{v_j} \prod_{j=k+1}^{2k} \left(\sum_{i=2}^{r} \frac{\lambda i}{jk\mu}\right)^{v_j} \ldots \prod_{j=\left[\frac{h}{k}\right]k+1}^{h} \left(\sum_{i=\left[\frac{h}{k}\right]+1}^{r} \frac{\lambda i}{jk\mu}\right)^{v_j}$$

unde $s = 0, 1, \ldots$ şi $\left[\frac{h}{k}\right]$ este partea întreagă a raportului $\frac{h}{k}$

CAZUL STAȚIONAR

În cazul cînd sistemul este în echilibru, $p_r = \lim_{t\to\infty} P_s(t)$, iar din ecuațiile diferențiale (1) rezultă că și $P'_s(t)$ tinde către o limită finită cînd t tinde către infinit. Această limită nu poate fi decît zero.

Prin urmare, probabilitățile stării de echilibru sînt date de ecuațiile.

$$0 = k\lambda p_1 - \sum_{i+1}^{r} \lambda_i p_0$$

$$0 = k\lambda(s+1)^P s + 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\lambda s\right) p_s \qquad s < k$$

$$0 = k\lambda(k+1)^P \bar{k} + 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\,\mu k\right) p_k + \lambda_1 p_0$$

$$0 = k\mu(s+1)^P s + 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + k\,\mu s\right) p_s + \sum_{i=1}^{u} \lambda_i p_{s-ik} \qquad s > k;$$

$$u = \min\left(r, \left[\frac{s}{k}\right]\right)$$

și ecuația

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s = 1$$

în care $p_{s-ki} = 0$ pentru $s-ki<0$. Acum, dacă considerăm funcția generatoare

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s x^s, \qquad |x| \leqslant 1,$$

care, evident, este uniform convergentă pentru $|x| \leqslant 1$, și procedăm ca în cazul nestaționar, obținem următoarea ecuație diferențială pentru funcția generatoare

$$k\mu(x-1)\frac{\partial F}{\partial x} - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda i\,(x^{ki} - 1\right) F = 0,$$

sau

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{k\mu} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{x^{ki} - 1}{x - 1}$$

de unde

$$F(x) = C\, e^{\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{x^{ki}}{ki} + \frac{x^{ki-1}}{ki-1} + \dots + \frac{x}{1}\right]}.$$

Pentru $x = 1$

$$F(1) = 1 = C\, e^{\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1} \lambda_i \left[\frac{1}{ki} + \frac{1}{ki-1} + \dots + \frac{1}{1}\right]}.$$

Prin urmare

$$F(x) = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\frac{x^{ki}-1}{ki}+\frac{x^{ki-1}-1}{ki-1}+\dots+\frac{x-1}{1}\right]}.$$

Dar această este chiar relaţia (6), deci

$$p_s = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}+\dots+\lambda_r\sum_{j=(r-1)k+1}^{rk}\frac{1}{j}}\times$$

$$\times\sum_{v_1+2v_2+\dots+hv_h=s}\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i-1}^{r}\frac{\lambda i}{jk\mu}\right)^{v_j}\cdots\prod_{j=\left[\frac{h}{k}\right]k+1}^{h}\left(\sum_{i=\left[\frac{h}{k}\right]+1}^{r}\frac{\lambda i}{jk\mu}\right)^{v_j}$$

unde $\left[\frac{h}{k}\right]$ este partea întreagă a raportului, $\frac{h}{k}$ iar $s = 0, 1, \dots$

§ 2. MODEL NESTAŢIONAR CU PARAMETRI VARIABILI

Toate ipotezele din primul paragraf se menţin şi aici afară de faptul că parametru $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ şi μ, în primul paragraf sînt constante iar în acest parygraf sînt funcţii de timpul t, integrabile Riemann şi limitele cînd $t \to \infty$ există şi sînt numere finite. Deci, în acest paragraf mai presupunem că:

— probabilitatea ca să sosească i unităţi în sistemul de aşteptare, este $\lambda_i(t)\,\Delta t + 0(\Delta t)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i(t) = \lambda_i (1 \leqslant i \leqslant r)$;

— probabilitatea ca o unitate să fie servită complect, este $\mu(t)\Delta t + 0\,(\Delta t)$; şi $\lim\limits_{t\to\infty}\mu(t) = \mu > 0$

— probabilitatea ca să se efectueze o fază, este $k\mu(t)\Delta t + 0(\Delta t)$ şi proabbilitatea ca să se efectueze una dintre cele s faze rămase de efectuat pentru toate unităţile din sistemul de aşteptare, este $sk\mu(t)\Delta t + 0(\Delta t)$.

În acest caz ecuaţiile modelului sînt:

$$P_0'(t) = k\mu(t)\,P_1(t) - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)\,P_0(t)$$

$$9)\qquad P_s'(t) = k\mu(t)\,(s+1)\,P_{s+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t) + k\mu(t)\,s\right)P_s(t) \qquad s < k$$

$$P_k'(t) = k\mu(t)\,(k+1)\,P_{k+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t) + k\mu(t)\,k\right)P_k(t) + \lambda_1(t)\,P_0(t)$$

$$P_s'(t) = k\mu(t)\,(s+1)\,P_{s+1}(t) - \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t) + k\mu(t)\,s\right)P_s(t) + \sum_{i=1}^{u}\lambda_i(t)\,P_{s-ki}(t)$$

$$s > k;\quad u = \min\left(r, \left[\frac{s}{k}\right]\right)$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, (de un număr infinit de ecuaţii diferenţiale) vom folosi funcţia generatoare definită în paragraful 1. Procedînd la rezolvarea sistemului la fel ca în primul paragraf 1, obţinem pentru funcţia generatoare următoarea ecuaţie

$$\frac{\partial F}{\partial t} + k\mu(t)\,(x-1)\,\frac{\partial F}{\partial x} - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t)\,(x^{ki}-1)\right)F = 0$$

Observăm că în această ecuaţie coeficientul lui $F(t,x)$ depinde de x şi de t, prin urmare, pentru a rezolva această ecuaţie nu mai putem folosi procedeul folosit pentru cazul parametrilor constanţi unde acest coeficient depinde numai de x.

În acest scop vom face substitutia

$$F(t, x) = e^{g(t,x)}F_1(t, x)$$

spre a face să dispară al treilea termen al ecuaţiei (10). Deci, obţinem ecuaţia

$$e^{g(t,x)}\left[\frac{\partial F_1}{\partial t} + k\mu(t)\,(x-1)\,\frac{\partial F_1}{\partial x}\right] +$$

$$+\, e^{g(t,x)}F_1\left[\frac{\partial g}{\partial t} + k\mu(t)\,(x-1)\,\frac{\partial g}{\partial x} - \sum_{i=1}^{r} \lambda i(t)\,(x^{ki}-1)\right] = 0.$$

Punem condiţia ca

$$\frac{\partial g}{\partial t} + k\mu(t)\,(x-1)\,\frac{\partial g}{\partial x} - \sum_{i=1}^{r} \lambda i(t)\,(x^{ki}-1) = 0. \tag{11}$$

O soluţie a acestei ecuaţii se găseşte rezolvînd următorul sistem

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{k\mu(t)\,(x-1)} = \frac{dg}{\sum_{i=1}^{r} \lambda i(t)\,(x^{ki}-1)}.$$

Din primul şi al doilea raport se obţine

$$x = C_1 e^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz} + 1.$$

Din primul şi al treilea raport se obţine

$$g(t, x) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \lambda i(v) \left\{\left(1 + C_1\, e^{-k\int_0^v \mu(z)\,dz}\right)^{ki} - 1\right\} dv + C_2.$$

Însă

$$C_1 = (x-1)\, e^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz}$$

deci

$$g(t, x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda i(v) \left\{ \left(1 + (x-1)\, e^{-k \int_v^t \mu(z)\, dz} \right)^{ki} - 1 \right\} dv + C_2.$$

O soluţie particulară a ecuaţiei 10) este pentru $C_2 = 0$, adică

$$g(t, x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda i(v) \left\{ \left(1 + (x-1)\, e^{-k \int_v^t \mu(z)\, dz} \right)^{ki} - 1 \right\} dv$$

verifică ecuaţia (10).

Prin urmare

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + k\mu(t)\,(x-1)\,\frac{\partial F_1}{-\partial x} = 0.$$

Notînd

$$G(t, x) = (x-1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz}$$

şi

$$D(F_1, G) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial t} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ (x-1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz} & e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz} \end{vmatrix}$$

se observă că

$$D(F_1, G) = 0$$

Adică, soluţia generală a ecuaţiei în F_1 este

$$F_1(t, x) = R\left[(x-1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz} \right].$$

Prin urmare

$$F(t, x) = e^{\sum_{i=1}^{r} \int_0^t \lambda i(v) \left\{ \left(1 + (x-1)\, e^{-k \int_v^t \mu(z)\, dz} \right)^{ki} - 1 \right\} dv}\, R\left[(x-1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz} \right].$$

Pentru obţinerea expresiei precise a funcţiei generatoare trebuie ţinut seamă de condiţiile iniţiale, adică de starea sistemului la momentul iniţial.

Dacă la momentul $t = 0$ avem

$$Ps(0) = a_s (s = 0, 1, \ldots),$$

atunci făcînd $t = 0$ în expresia (12) se obţine

$$F(0, x) = R(x-1) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s.$$

Dacă notăm

$$x - 1 = z$$

atunci

$$R(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (z + 1)^s.$$

Şi prin substituia

$$z = (x - 1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz}$$

se obţine

$$R\left[(x - 1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz}\right] = \Sigma a_s \left[(x - 1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz}\right]^s.$$

Deci

$$F(t, x) = e^{\sum_{i=1}^{r} \int_0^t \lambda i(v) \{[1 + (x-1) e^{-k \int_v^t \mu(z)\, dz}]^{ki} - 1\}\, dv} \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} a_s [1 + (x -) e^{-k \int_0^t \mu(z)\, dz}]^s$$

Desigur odată cunoscută funcţia generatoare se pot afla expresiile pentru $P_s(t)$ $(s = 0, 1, 2, ...)$

În adevăr, pentru $x = 0$

$$F(t, 0) = P_0(t)$$

$$\frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s F}{\partial x^s}\right)_{x=0} = P_s(t) \qquad (s = 1, 2, ...)$$

Dacă notăm cu T valoarea medie a numărului de faze necesare de efectuat la momentul t atunci,

$$T = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=1}$$

Să vedem acuma dacă există limita cînd t tinde la infinit şi care este expresia acestei limite.

Observăm că dacă dezvoltăm seria

$$\sum_{s=0}^{\infty} a\, [1 + (x - 1)\, e^{-k \int_0^t \mu(z) dz}]^s$$

după puterile lui x se obţine o serie de forma

$$\Sigma b_s(t)\, x^s$$

Dacă punem în (12) $x = 0$ se obţine

$$b_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s[1 - e^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz}]^s$$

Întrucît seria este uniform convergentă

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} b_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s[1 - e^{-\lim_{t\to\infty} k\int_0^t \mu^s(z)\,dz}]^s.$$

Iar $\lim_{t\to\infty} k\int_0^t \mu(z)\,dz = \infty$ fiindcă $\mu(z) > 0$ şi $\lim_{t\to\infty} \mu(z) = \mu > 0$.

Deci

$$\lim_{t\to\infty} b_0(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s = 1.$$

Relaţia (12) se mai poate scrie

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s(t)\, x^s = \sum_{s=0}^{\infty} a_s[xe^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz} + 1 - e^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz}]^s \tag{13}$$

unde

$$x \geqslant 0; \quad 1 - e^{-k\int_0^t \mu(z)\,dz} \geqslant 0.$$

deci şi

$$b_s(t) \geqslant 0.$$

Dacă în relaţia (13) facem acum $x = 1$, se obţine

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s = 1$$

şi deci $\lim_{t\to\infty} b_s(t) = 0$ pentru $s > 0$

Rezultă că pentru x fix

$$\lim_{t=0} \sum_{s=0}^{\infty} b_s(t)\, x^s$$

există şi este egală cu 1.

Se vedem ce se întîmplă cu primul factor al expresiei (11) adică,

$$e^{\sum_{i=1}^{r} \lambda i(v)\,\{(1-(x-1)\,e^{-k\int_v^t \mu(z)\,dz})^{ki} - 1\}\,dv}$$

cînd t tinde la infinit.

Fie o componentă oarecare a exponentului

$$\int_0^t \lambda i(v)\,\{(1+(x-1)\,e^{-k\int_v^t \mu(z)\,dz})^{ki}-1\}\,dv=$$

$$=\int_0^t \lambda i(v)\sum_{n=1}^{ki} C_{ki}^n (x-1)^n\, e^{-nk\int_v^t \mu(z)\,dz}\,dv=$$

$$\sum_{n=1}^{ki} C_{ki}^n (x-1)^n \int_0^t \lambda_i(v)\, e^{-nk\int_v^t \mu(z)\,dz}.$$

Se vede că

$$\int_0^t \lambda i(v)\, e^{-kn\int_v^t \mu(z)\,dz}\,dv=\frac{\int_0^t (\lambda i(v)\, e^{nk\int_0^v \mu(z)\,dz})\,dv}{e^{nk\int_0^t \mu(z)\,dz}}.$$

Aplicînd regula lui l'Hopital, obținem

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \lambda i(v)\, e^{-nk\int_v^i \mu(z)\,dz}\,dv=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda i(t)\, e^{nk\int_0^t \mu(z)\,dz}}{nk\mu(t)\, e^{nk\int_0^t \mu(z)\,dz}}=\frac{\lambda i}{nk\mu}$$

Prin urmare

$$\lim_{t\to\infty}\int_0 \lambda i(v)\,\{(1+(x-1)\,e^{-k\int_v^t \mu(z)\,dz})^{ki}-1\}\,dv=\sum_{n=1}^{ki} C_{ki}^n\,\frac{\lambda i}{k\mu}\,\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Însă prin inducție se poate demonstra că

$$\sum_{n=1}^{ki} C_{ki}^n\,\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{ki}\frac{x^n-1}{n}.$$

Deci

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{r}\int_0^t \lambda i(v)\,\{(1+(x-1)\,e^{-k\int_v^t \mu(z)\,dz})^{ki}-1\}\,dv=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda i}{0^k}\left[\frac{x^{ki}-1}{ki}+\frac{x^{ki-1}-1}{ki-1}+\ldots+\frac{x-1}{1}\right]$$

Rezultă că

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} F(x,t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{s=0}^{\infty} P_s(t)\,x^s=e^{\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda i\left[\frac{x^{ki}-1}{ki}+\frac{x^{ki-1}-1}{ki-1}+\ldots+\frac{x-1}{1}\right]}$$

Se observă că limita (cînd $t \to \infty$) funcţiei generatoare în cazul parametrilor variabili este aceiaşi cu limita funcţiei generatoare în cazul parametrilor constanţi. Prin urmare, şi expresiile probabilităţilor vor fi aceleaşi. Deci

$$\lim P_s(t) = e^{-\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \ldots + \lambda_r \sum_{j=(r-1)k+1}^{rk}\frac{1}{j}} \times$$

$$\times \sum_{v_1+2v_2+\ldots+hv_h=s} \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{jk\mu}\right)^{v_j} \prod_{j=k+1}^{2k}\left(\sum_{i=2}^{r}\frac{\lambda_i}{jk\mu}\right)^{v_j} \cdots \prod_{j=\left[\frac{h}{k}\right]k+1}^{h}\left(\sum_{i=\left[\frac{h}{k}\right]+1}^{r}\frac{\lambda_i}{jk\mu}\right)^{v_j}$$

unde $s = 0, 1, \ldots,$ iar $\left[\frac{h}{k}\right]$ este partea întreagă a raportului $\frac{h}{k}$.

BIBLIOGRAFIE

1. **Brumelle, H.,** *Some inequalities for parallel server queues* OR (ORSA) March-April (1971 vol. 19|2| pp. 403–413
2. **Ciucu G.,** *Un model cu veniri în grup,* Analele Universităţii Bucureşti, 2, anul XIII, 1964
3. **Courtois, P. Sl, Georges, Jl Al,** *A single server finite cueuing model with state-dependent arriva, and service processes.* OR (ORSA), March-April, 1971, vol. 19|2|, pp 424–435
4. (Miss) **Sharda,** *A discrete time limited space cueuing problem with batch arrivals forming a markovian chain service in M paralel channels in batches of variable size.* Cahaere du Centre d'etudes de Recherche Operationnalle. Vol., 12, nr. 3, 1970.
5. **Mihoc Gh.** *Noi probleme ale teoriei deservicrii în masă,* Calcul Economic, 1964.
6. **Restreppo Rodrigo,** *A queu with batch arrivals and services Erlang distributed,* Operations Reserach, Nr, 13 1965, pp. 375–381.
7. **Theiler, Gh.,** *Asupra teoriei probabilistice a serviciilor în masă cu parametri variabilf,* Calcul economic, 1964.
8. **Hincin, A.,** *Pabotî po matematicescoi teorii masavovo obslujivania.* Moscova 1963.

Primită la 13 VI 1973

Centrul de Calcul al Universităţii Bucureşti

ON A QUEUEING MODEL AFTER THE RULE OF POISSON AUD SERVICES AFTER THE ERLANG RULE

Abstract

This paper studies a queueing model, with an infinite number service-channels, in stationary and nonstationary behaviour.

Both in the first and second part, arrivals are independent, made up by groups of maximum size r and characterized by Poisson distribution with parameter $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ and $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ respectively; services are individual independent and characterized by an Erlang distribution with k phases and parameter μ and $\mu f t)$ respectively.

GRUPPI D'OMOTOPIA DI ČECH

RITA CIAMPI (a Roma) e GIUSEPPE DE CECCO (a Lecce) *

Groupes d'homotopie de čech

Scopo del presente lavoro è quello d'introdurre un funtore di omotopia π dalla categoria di coppie di spazi topologici puntati (verificanti l'assioma di separazione T_1) ed applicazioni continue alla categoria in generale dei gruppi, secondo il procedimento usato in Eilenberg-Steenrod ([1]. cap. IX) per definire il funtore d'omologia di Čech.

L'interesse del procedimento sta nel fatto che per alcune classi di spazi topologici $\check{\pi}$ coincide col funtore classico d'omotopia π mentre in generale questo non accade. Infatti $\check{\pi}$ verifica quasi tutti gli assiomi di un sistema d'omotopia ([2], cap. IV): in particulare non vale l'assioma di fibrazione.

Si fa vedere poi come l'insieme $\check{\pi}_0(X, x_0)$, in certi casi particolari coincide con l'insieme delle quasi-componenti connesse di X.

Ringraziamo il prof. I. Bucur dell'Università di Bucarest per averci suggerito questo tema di ricerca e consigliato più volte durante lo svolgimento del lavoro e il prof. A. Dold dell'Università di Heidelberg che, durante un suo soggiorno a Roma ci ha dato preziose indicazioni.

§ 1. PREREQUISITI

Per tutte le nozioni preliminari al nostro studio come pure per la terminologia usata facciamo riferimento principalmente a due testi fondamentali: ad Eilenberg e Steenrod [1] per quel che riguarda la nozione di ricoprimento, nervo di un ricoprimento, proiezione tra i nervi, nonchè per la trattazione dei si stemi diretti ed inversi su insiemi filtranti e dei loro limiti e per l'importa zione della teoria di omologia di Čech; a Sze-Tsen Hu [2] per la trattazione della teoria dell'omotopia relativa e per l'assiomatizzazione di un sistema di omotopia.

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. (Italia) nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Neometriche e loro Applicazioni.

§ 2. DEFINIZIONE DEI GRUPPI D'OMOTAPIA DI ČECH

Sia (X, A, x_0) una terna costituita da uno spazio topologico X, verificante l'addioma di separazione T_1, un sottoinsieme non vuoto A dixe un punto $x_0 \in A$. Se x_0 è l'unico puncto di A la terna (X,A,x_0) è denotata semplicemente con (X, x_0).

Indichiamo con $\mathrm{Cov}(X)$ l'insieme di tutti i ricoprimenti aperti di X e con $\mathrm{Cov}(X,A)$ quello dei ricoprimenti aperti della coppia (X, A) ([1], cap.IX). Ricordiamo che un *ricoprimento* aperto di X è una funzione α definita su un insieme V_α di indici tale che per ogni $v \in V_\alpha$, α_v è un aperto di X e $X = \bigcup \alpha_v$ per $v \in V_\alpha$. Se V_α^A è un sottoinsieme di V_α tale che $A \subset \bigcup \alpha_v$ per $v \in V_\alpha^A$, aloar α è detto *ricoprimento della coppia* (X, A) con indice in (V_α, V_α^A). Allora $\mathrm{Cov}(X)$ é il sotoinsieme di $\mathrm{Cov}(X, \emptyset)$ costituito dai ricoprimenti α con indice in $(V_\alpha, \emptyset)$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathrm{Cov}(X, A)$. Il ricoprimento β è detto *raffinamento* di α (in simboli $\alpha < \beta$) se esiste un'applicazione

$$p : (V_\beta, V_\beta^A) \to (V_\alpha, V_\alpha^A) \tag{2.1}$$

tale che

$$\beta_v \subset \alpha_{p(v)} \qquad \forall v \in V_\beta$$

$$p(v) \in V_\alpha^A \qquad \forall v \in V_\beta^A$$

Si vede facilmente che $\mathrm{Cov}(X,A)$ è filtrante rispetto alla relazione „$<$".

Diamo ora il concetto di *nervo* (di un ricoprimento) *con punto base* usando la seguente tecnica ([4]): sia $\{U_i\}$ un sistema d'intorni aperti di x_0 tale che

$$U_i \supset U_{i+1} \qquad \bigcap_i U_i = \{x_0\}$$

Ad ogni ricoprimento $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ aggiungiamo un insieme U^α della famiglia $\{U_i\}$ tale che

1) U^α giaccia interamente in un aperto di α;

2) se $\alpha < \beta$ allora $U^\beta \subset U^\alpha$.

Definiamo per ogni $\alpha \in \mathrm{Cav}(X, A)$ un nuovo ricoprimento $\overline{\alpha} \in \mathrm{Cov}(X, A)$ costituito dagli aperti di α con l'aggiunta dell'aperto U^α · (1) Si vede subito che se $\alpha < \beta$ allora $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$.

(1) — Cioè $V_{\overline{\alpha}} = V_\alpha \bigcup \{U\}$ $\quad \overline{\alpha} \mid V_\alpha = \alpha \qquad \alpha f U^\alpha) = U^\alpha$

Per ogni $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ sia $(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$ il suo nervo con punto base, dove P_α è il vertice corrispondente ad U^α. Usiamo la stessa notazione $(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$ per la sua realizzazione geometrica $(|X_{\bar\alpha}|, |A_{\bar\alpha}|, |P_{\bar\alpha}|)$ con la topologia debole.

Poniamo

$$\pi_{q,\alpha} = \pi_q(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$$

essendo il secondo membro il q-esimo grupo d'omotopia di Hurewicz della terna (o coppia punctata) $(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$. Ricordiamo che in generale $\pi_{0,\alpha}$ *e* $\pi_{s,\alpha}$ nonsono gruppi. Per $\alpha < \beta$ consideriamo la proiezione tra nervi puntati

$$P^\beta_\alpha : (X_{\bar\beta}, A_{\bar\beta}, P_{\bar\beta}) \to (X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$$

indotta dalla proiezione (2.1).

Poichè due proiezioni p^β_α *e* p'^β_α sono omotope, il morfismo

$$P^\beta_{\alpha *} : \pi_{q,\beta} \to \pi_{q,\alpha}$$

dipende solo dalla relazione di raffinamento $\alpha < \beta$. Ne segue che la famiglia $\{\pi_{q,\alpha}, p^\beta_{\alpha *}\}$ è un sistema inverso sull'insieme filtrante $\mathrm{Cov}(X, A)$, detto *q-esimo sistema di omotopia di Čech* della terna (X, A, x_0).

(2.2) *DEFINIZIONE:* Chiamiamo *q-esimo gruppo d'omotopia di Čech* della terna (X, A, x_0) il limite inverso del sistema $\{\pi_{q,\alpha}, p^\beta_{\alpha *}\}$ e lo indicheremo $\check\pi_p(X, A, x_0)$ [1]

$$\check\pi_q(X, A, x_0) = \varprojlim_\alpha \pi_q(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha})$$

§ 3. MARFISMA INDOTTA

Sia $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ un'applicazione continua di terne. Essa induce tra i ricoprimenti (ampliati secondo quanto detto al §.2) l'applicazione

$$f^{-1} : \mathrm{Cov}(Y, B) \to \mathrm{Cov}(X, A)$$
$$\alpha \to \alpha'.$$

Per ogni $\alpha \in \mathrm{Cov}(Y, B)$ il ricoprimento $\bar\alpha'$ ha indice in $(V_{\alpha'}, V^A_{\alpha'}) = (V_\alpha V^\beta_\alpha)$ ed è definito da

$$\alpha'_v = f^{-1}(\alpha_v) \quad \forall v \in V_\alpha \quad U^{\alpha'} = f^{-1}(U^\alpha)$$

[1] — In [9] si dà a tale notazione altro significato.

Allora il nervo $X_{\bar{\alpha}}$, è un sottocomplesso di $Y_{\bar{\alpha}}$ e $A_{\bar{\alpha}}$, è un sottocomplesso di $B_{\bar{\alpha}}$.

Indichiamo con

$$f_\alpha : (X_{\bar{\alpha}'}, A_{\bar{\alpha}'}, P_{\bar{\alpha}}) \to (Y_{\bar{\alpha}}, B_{\bar{\alpha}}, Q_{\bar{\alpha}})$$

l'applicazione d'inclusione. L'omomorfismo

$$f_{\alpha *} : \pi_q(X_{\bar{\alpha}'}, A_{\bar{\alpha}'}, P_{\bar{\alpha}'}) \to \pi_q(Y_{\bar{\alpha}}, B_{\bar{\alpha}}, Q_{\bar{\alpha}})$$

$\forall \alpha \in \mathrm{Cov}(Y,B)$ insieme con f^{-1} forma un'applicazione $\Phi(f)$ del q-esimo sistema d'omotopia di Čech di (X, A) in quello di (Y, B).

(3.1) *DEFINIZIONE:* Chiamiamo *morfismo indotto* da f il limite inverso dell'applicazione $\Phi(f)$ che indiciamo

$$\check{f}_{*,q} : \check{\pi}(X, A, x_0) \to \check{\pi}(Y, B, y_0)$$

§ 4. MORFISMO BORDO E SUCCESIONE D'OMOTOPIA

Cerchiamo ora un morfismo

$$\check{\partial}_q : \check{\pi}(X, A, x_0) \to \check{\pi}_{q-1}(A, x_0)$$

che svolga il ruolo del morfismo bordo della teoria classica. Per $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ sia S_α la succesione d'omotopia di $(X_{\bar{\alpha}}, A_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}})$ ([1], cap. IX, §.7):

$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_{q+1}(X_{\bar{\alpha}}, A_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \xrightarrow{\partial} \pi_q(A_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \xrightarrow{i_*} \pi_q(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \xrightarrow{j_*} \pi_q(X_{\bar{\alpha}}, A_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \to \tag{4.1}$$

Se $\alpha < \beta$ sia $\rho^\beta_{\alpha *} : S_\beta \to S_\alpha$ l'applicazione tra successioni indotta dalle proiezioni p^β_α.

La successione limite risultante:

$$\ldots \xrightarrow{j'_*} \check{\pi}_{q+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial'} \hat{\pi}_q(A, x_0)_{(X,A)} \xrightarrow{i'_*} \check{\pi}_q(X, x_0)_{(X,A)} \xrightarrow{j'_*} \hat{\pi}_q(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial}$$

non è adatta a definire $\hat{\partial}$ in quanto il limite è stato fatto su $\mathrm{Cov}(X, A)$, donde l'indicazione in basso, mentre per i gruppi $\hat{\pi}_q(A, x_0)$ e $\hat{\pi}_q(X, x_0)$ il limite deve essere fatto rispertivamente su $\mathrm{Cov}(A)$ e $\mathrm{Cov}(X)$.

Con la tecnica usata nel caso dell'omologia ([1]) si possono trovare degli isomorfismi

$$\varphi_\infty : \hat{\pi}_q(A, x_0) \to \hat{\pi}_q(A, x_0)_{(X,A)} \qquad \psi_\infty : \hat{\pi}_q(X, x_0) \to \hat{\pi}_q(X, x_0)_{(X,A)}$$

per cui è possibile dare la seguente

(4.2) *DEFINIZIONE:* Chiamiamo *morfismo bordo* l'applicazione

$$\hat{\partial} = \varphi_\infty^{-1}\partial'$$

Similmente si può dimostrare ([1], cap. IX, teorema 7.5)

(4.3) **TEOREMA**: La successione d'omotopia di Čech

$$\ldots \xrightarrow{\check{j}} \check{\pi}_{q+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\check{\partial}} \check{\pi}_q(A, x_0) \xrightarrow{\check{i}_*} \check{\pi}_q(X, x_0) \xrightarrow{\check{j}_*} \check{\pi}_q(X, A, x_0) \xrightarrow{\check{\partial}} \ldots$$

è isomorfa alla successione limite. L'isomorfismo è dato da φ_∞, ψ_∞ e dall'applicazione identica di $\hat{\pi}_q(X, A, x_0)$ con se stesso.

§. 5.11 IL FUNTORE D'OMOTOPIA DI ČECH

Mediante le definizioni precedenti abbiamo costruito un sistema

$$H = \{\check{\pi}, \check{\partial}, \hat{*}\}$$

e vogliamo vedere in che misure sono verificati gli assiomi di un *sistema di omotopia* ([2] cap. IV, §.11)

(5.1) *PROPOSIZIONE:* Per ogni $n > 0$ le corrispondenze

$$(X, A, x_0) \to \hat{\pi}_n(X, A, x_0) \quad e \quad f \to \check{f}_{*n}$$

definiscono un funtore covariante dalla categoria di coppie puntate e applicazioni continue alla categoria degli insiemi. In particolare per $n \geqslant 2$ (risp. $n \geqslant 3$) la categoria di arrivo sarà quella dei gruppi (risp. gruppi abeliani). Le corrispondenze

$$(X, x_0) \to \hat{\pi}_0(X, x_0) \qquad f \to \hat{f}_{*0}$$

definiscono un funtore dalla categoria di spazi topologici puntati a applicazioni puntate continue alla categoria degli insiemi puntati.

(5.2) *PROPOSIZIONE:* Se X è uno spazio formato da un solo punto, allora $\hat{\pi}_n(X, x_0) = 0$ per $n \geqslant 0$.
La dimostrazione delle due precedenti proposizioni è ovvia dalla definizioni.

(5.3) *PROPOSIZIONE:* Se f : $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ è un applicazione e $g : (A, x_0) \to (B, y_0)$ la sua restrizione, allora $\forall n > 0$ il seguente rettangolo è commutativo

$$\begin{array}{ccc} \check{\pi}_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\hat{\partial}} & \check{\pi}_{n-1}(A, x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \check{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \check{g}_*} \\ \check{\pi}_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\hat{\partial}} & \check{\pi}_{n-1}(B, y_0) \end{array}$$

DIM. Per la dimostrazione si procede analogamente a [1] pag. 246

(5.4) *TEOREMA:* Se $f_0 \simeq f_1 : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ (rel $\{A, B; x_0, y_0\}$) ora $(\check{f}_{0*})_n = (\check{f}_{1*})_n \quad \forall_n > 0$

La dimostrazione è alquanto laboriosa perciò ne daremo solo un'idea ilmandando ad[1] per i concetti che vengono introdotti.

Ricordiamo intanto che

(5.5) *DEFINIZIONE:* Un ricoprimento α dell'intervallo $I = [0,1]$ con indice in $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ $(n \geqslant 0)$ è detto *regolare* se gli insiemi α_i sono aperti e connessi e vale

$$0 \in \alpha_0 \ e \ 0 \notin \alpha_1 \qquad 1 \in \alpha_n \ e \ 1 \notin \alpha_{n-1}$$

$$\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \varphi \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset \qquad i = j - 1$$

(5.6) *DEFINIZIONE:* Sia $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ un ricoprimento con indice in (V_α, V_α^A). Supponiamo che ad ogni $v \in V$ corrisponde un ricoprimento regolare β_i^V di I con indice variabile in $N^V = (0, 1, \ldots, n^V)$. Consideriamo l'insime W di tutte le coppie (v, i), $v \in V_\alpha$, $i \in N^V$ e il sottoinsieme $W' \subset W$ di tutte le coppie (v, i) con $v \in V_\alpha^V$. Il ricoprimento $\gamma \in \mathrm{Cov}(X \times I, A \times I)$ con indice in (W, W') e definito da

$$\gamma_{v,i} = \alpha_v \times \beta_i^v$$

è chiamato *ricoprimento a pila* („stacked") su α.
Si può dimostrate che ([1] pag. 241)

(5.7) *PROPOSIZIONE:* I ricoprimenti regolari formano un sottoinsieme cofinale di Cov(I). I ricoprimenti a pila formano un sottoinsieme cofina di $\mathrm{Cov}(X \times \mathrm{I}, A \times \mathrm{I})$.
Inoltre

(5.8) *PROPOSIZIONE:* Sia γ un ricoprimento a pila su α $\mathrm{Cov}(X)$. Se il nervo X_α è un simplesso (finito), allora $(X \times \mathrm{I})$ γ è contraibile.
Dim. E' analoga a quella riportata in [1] pag. 242 sostituendo alla parola „acciclico" la parola „contraibile" essendo con questa modifica valido il lemma 5.2 di [1] pag. 240, come suggerito da Lee e Raymond [3].

Sia $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$, $x_0 \in \alpha_{v_0}, \bigcup^\alpha \subset \alpha_{v_0}$,(§.2) e $\beta_i^{v_0}$ il ricoprimento regolare di I corrispondente ad α_{v_0}. Il ricoprimento γ a pila su γ indice su $x_0 \times \mathrm{I}$ un rico primento regolare con indice in N_{v_0} ; agli aperti di γ aggiungiamo gli aperti $\mathrm{U}^\gamma = \mathrm{U}^\alpha \times \beta_0^{v_0}$ e $\mathrm{U}_l^\gamma = \mathrm{U}^\alpha \times \beta_n^{v_0} \forall_0$ ottenendo cosò un nuovo ricoprimento $\overline{\gamma} \in \mathrm{Cov}(X \times I, A \times I)$. Naturalmente U_0^γ e U_0^γ sono intorni aperti rispettivamente dei punti $(x_0, 0)$ e $(x_0, 1)$ e verificano le condizioni date per determinare nervi con punto base.

(5.9) *PROPOSIZIONE:* Sia γ un ricoprimento a pila su $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ con indice in (V_α, V_α^A). Consideriamo le applicazioni simpliciali

$$l, u : (X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha}) \to ((X \times I)_{\bar\gamma}, (M \times I)_{\bar\gamma}\ (X_0 \times I)_{\bar\gamma})$$

definite per $v \in V_\alpha$ da

$$l(v) = (v, 0) \qquad u(v) = (v, n^v)$$

allora

$$l \simeq u$$

Dim. ([1] Lemma 5.8 pag. 242) Per ogni simplesso s del nervo $X_{\bar\alpha}$ (considerato come complesso simpliciale), sia C(s) il sottocomplesso di $(X \times I)_{\bar\gamma}$ costituito da tutti i simplessi i cui vertici hanno la forma (v, i) essendo v un vertice di s. Il simplesso s è il nervo di un ricoprimento α' di un sottoinsieme X' di X e $C(s)$ è contraibile per la prop. (18). Se s' è una faccia di s allora $C(s') \subset \subset C(s)$; e se s è in A_α allora $C(s)$ è in $(A \times I)_{\bar\gamma}$. Allora per il teorema dei supporti aciclici ([1], pag. 171) è possibile definire un'omotopia ([3], pag. 418)

$$k : (X_{\bar\alpha} \times I) \to (X \times I)_{\bar\gamma}$$

per induzione sollo scheletro di $X_{\bar\alpha}$ tale che

$$k(s^n \times I) \subset C(s^n)$$

per ogni n-simplesso s^n di $X_{\bar\alpha}$ con $k_0 = l$ e $k_1 = u$.

Ora il nervo $(x_0 \times I)_{\bar\gamma}$ è connesso per archi e quindi esiste per ogni $\bar\gamma$ n modo canonico un isomorfismo

$$C_{\alpha_*} : \pi_1((X \times I)_{\bar\gamma}, (A \times I)Q)^0_{\bar\gamma}, \to \pi_1(X \times I)_{\bar\gamma}, (A \times I)_{\bar\gamma}, Q^1_{\bar\gamma})$$

dove Q^0_γ e Q^1_γ sono i vertici corrispondenti agli aperti U^γ_0 e U^γ_1. Da cui ternendo conto di noti teoremi segue la commutività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X_{\bar\alpha}, A_{\bar\alpha}, P_{\bar\alpha}) \arrow[r, "l_{\alpha*}"] \arrow[dr, "u_{\alpha*}"'] & \pi_q((X \times I)_{\bar\gamma}, (A \times I)_{\bar\gamma}, Q^0_{\bar\gamma}) \arrow[d, "C_{\alpha*}"] \\
& \pi_q((X \times I)_{\bar\gamma}, (A \times I)_{\bar\gamma}, Q^1_{\bar\gamma})
\end{tikzcd}$$

avendo indicato per maggior chiarezza con e_α e u_α le applicazioni introdotte in (5.9).

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente fondamentale teorema ([1], Dim. di 5.1 pag. 243):

(5.10) *TEOREMA:* Siano $g_0, g_1 : (X,A,x_0) \to (X\times I,\ A\times I,\ x_0\times I)$ due funzioni continue fefinite da

$$g_0(x) = (x, 0) \qquad g_1(x) = (x, 1)$$

allora è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\check{\pi}_q(X, A, x_0) \arrow[r, "\check{g}_{0*}"] \arrow[dr, "\check{g}_{1*}"'] & \hat{\pi}((X\times I,\ A\times I,\ (x_0, 0)) \arrow[d, "\check{c}_*"] \\
& \pi_q((X\times I,\ A\times I,\ (x_0, 1))
\end{tikzcd}$$

Dim. Sia D il sottoinsieme cofinale di $\mathrm{Cov}(X\times I,\ A\times I)$ costituito dai ricoprimenti a pila. Sia $\gamma\in D$. Consideriamo i ricoprimenti $\gamma_0 = \gamma_0^{-1}\gamma$, $\gamma_1 = g_1^{-1}\gamma$ di (X, A) e le inclusioni

$$g_{0\gamma} : (X_{\overline{\gamma}_0}, A_{\overline{\gamma}_0}, P_{\overline{\gamma}_0}) \to ((X\times I_{\overline{\gamma}},\ (A\times I)_{\overline{\gamma}}, Q^0_{\overline{\gamma}})$$
$$g_{1\gamma} : (X_{\overline{\gamma}_1}, A_{\overline{\gamma}_1}, P_{\overline{\gamma}_1}) \to ((X\times I)_{\overline{\gamma}},\ (A\times I)_{\overline{\gamma}}, Q^1_{\overline{\gamma}})$$

L'applicazione u_α definita in (5.9) può essere fattorizzata in $u_\alpha = g_1\, u'\gamma$ dove

$$u'_\alpha : (X_{\overline{\alpha}}, A_{\overline{\alpha}}, P_{\overline{\alpha}}) \to (X_{\overline{\gamma}_1}, A_{\overline{\gamma}_1}, P_{\overline{\gamma}_1})$$

è l'isomorfismo definito da $u'_\alpha(v) = (v, n^V)$.

Osserviamo che $\overline{\gamma}_0 < \overline{\gamma}_1$ e l'applicazione

$$p : (X_{\overline{\gamma}_1}, A_{\overline{\gamma}_1}, P_{\overline{\gamma}}) \to (X_{\overline{\gamma}_0}, A_{\overline{\gamma}_0}, P_{\overline{\gamma}_0})$$

definita da $\rho(v, i) = (v, 0)$ è una proiezione. Inoltre da $e_\alpha = g_{0\gamma}\ \rho u_\alpha$ segue

$$e_{\alpha_*} = g_{0\gamma_*}\rho u'_{\alpha_*} \qquad u_{\alpha_*} = g_{1\gamma^*}u'_*$$

Ma poichè $u_{\alpha_*} = c_{\alpha_*}e_{\alpha_*}$ e u'_{α_*} è un isomorfismo segue che

$$g_{1\gamma_*}] = c_{\alpha_*}g_{0\gamma^*}\,\rho$$

da cui $\check{g}_{1_*} = \check{c}_*\check{g}_{0_*}$.

Possiamo ora dimostrare l'anunciato teorema (5.4)

Dim. di(5.4): Sia $H : (X, A, x_0)\times I \to (Y, B, y_0)$ la funzione che realizza la omotopia tra f_0 e f_1 e incichiamo

$$H_0 = H\,|\,(X\times 0) \qquad H_1 = H\,|\,(X\times 1)$$

Allora per ogni $n > 0$ si ha

$$\hat{f}_{1*} = (Hg)^{\vee}_{*}) = (H_1g_1)^{\vee}_{*} = \check{H}_{1*}\check{g}_{1*} = \check{H}_{1*}C_*\check{g}_{0*} =$$
$$\check{H}_{0*}\check{g}_{0*} = (H_0g_0)^{\vee}_{*} = (Hg_0)^{\vee}_{*} = \check{f}_{0*}$$

§. 6. ESEMPIO

Sia $X = L \cup M \cup N$ il sottoinsieme di R^2 tale che

$$L = \left\{(x, y) \mid y = \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ 0 < x < \frac{1}{\pi}\right\}$$

$$M = \{(0, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1)$$

e N un arco regolare che unisce i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ senza incontrare L e M. Sia x_0 il punto $(1/\pi, 0)$.

Si può definire un sistema cofinale di ricoprimenti dello spazio $X \subset R^2$ partendo da ricoprimenti „regolari" degli spazi L, M, N. Il nervo $X_{\bar{\alpha}}$ associato al ricoprimento α del tipo precedente è omotopicamente equivalente ad una circonferenza, quindi $\pi_1(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \simeq Z$ e le proiezioni tra i nervi indicano isomorfismi tra i gruppi $\pi_{1,\alpha}$. Per cui passando al limite si ha $\check{\pi}_1(X, x_0) \simeq Z$.

Osserviamo infine che per X i gruppi d'omotopia ordinaria non coincidono con quelli di Čech precedentemente definiti; infatti $\pi_1(X, x_0) = 0$

§. 7. SUCCESSIONE D'OMOTOPIA

E' noto che il limite inverso di un sistema di successioni esatte in generale è non esatto. Tuttavia si può provare facilmente con ragionamenti analoghi a quelli fatti in [1] (pag. 224 e 251) che:

(7.1) *PROPOSIZIONE:* Se (X, A, x_0) è una terna, la successione d'omotopia di Čech

$$\ldots \xrightarrow{\check{j}_*} \check{\pi}_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\check{\partial}} \check{\pi}_n(A, x_0) \xrightarrow{\check{i}_*} \check{\pi}_n(X, x_0) \xrightarrow{\check{j}_*} \check{\pi}(X, A, x_0) \xrightarrow{\check{\partial}} \ldots$$

è una successione d'ordine 2.

(7.2) *PROPOSIZIONE:* Se (X, A, x_0) è una terna triangolabile finita allora la successione d'omotopia di Cech è esazta.

Vedremo poi come la precedente proposizione si possa estendere ad una classe più ampia di spazi topologici.

§. 8. FIBRAZIANE

Consideriamo gli assiomi di un *sistema d'omotopia* come riportati in *Hu* ([2], pag. 120). La proposizioni (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) provano che sono verificati gli assiomi I, II, III, V, VII, mentre la proposizione (7.1) prova che l'assioma IV (assioma d'esattezza debole) è solo parzialmente verificato.

Occupiamoci ora dell'assioma VI (assioma di fibrazione) che nel nostro caso si tradurrebbe nel seguente:

(8.1) *Assioma di fibrazione:* Sia (X, A, x_0) una terna, X' lo spazio dei cammini di X con punto finale x_0, A' lo spazio dei cammini di X con punto iniziale in A e finale in x_0 e $x'_0 \in A'$ il cappio degenere $x'_0(I) = x_0$. L'applicazione

$$p : (X', A', x_0) \to (X, A, x_0)$$
$$\sigma \to \sigma(0)$$

induce per ogni $n > 0$ la corrispondenza biunivoca

$$\check{p}_* : \check{\pi}_n(X', A', x') \to \check{\pi}(X, A, x_0)$$

Facciamo vedere subito che la proprietà espressa dall'assioma non è in generale verificata, come prova il seguente esempio.

Sia $Y = L \cup M_1 \cup N_1$ il sottoinsieme di IR^2 tale che

$$L = \{(x, y) \mid y = \operatorname{sen}(1/x), \quad 0 < x \leqslant 1/\pi)$$

$$M_1 = \{(-1, y) \mid \quad -1 \leqslant y \leqslant 1)$$

e N_1 un arco regolare che unisce i punti $(-1, 0)$ e $(1/\pi, 0)$ senza incontrare L e M_1. Sia y_0 il punto $(1/\pi, 0)$.

Allora possiamo stabilire tra lo spazio X del § 6 et Y la corrispondenza canonica

$$\rho : Y \to X$$

che risulta essere biunivoca e continua. Passando allo spazio dei cammini e dei cappi tramite gli operatori rispettivamente E e Ω otteniamo che

$$\mathrm{E}_{(\rho)} : \mathrm{EY} \to \mathrm{EX} \qquad \Omega_{(\rho)} : \Omega\mathrm{Y} \to \Omega\mathrm{X}$$

sono omeomorfismi e quindi per la functorialità di $\hat{\pi}_1$, usando la notazione sopra introdotta, si ha per i sotospazi $\mathrm{B} \subset \mathrm{Y}$ e $\mathrm{A} = \rho(B) \subset X$

$$\hat{\pi}(X' ; A' ; x'_0) \cong \check{\pi}(Y' ; B' ; y'_0)$$

Se fosse vero l'assioma di fibrazione, per $B = \{y_0\}$, si dovrebbe avere

$$\check{\pi}_1(X', \Omega X, x') \cong \check{\pi}_1(X, x_0) \qquad \check{\pi}(Y', \Omega y Y'_0, \cong \check{\pi}_1(Y, y_0)$$

da cui

$$\check{\pi}_1(X, x_0) = \check{\pi}(Y, y_0)$$

e quindi l'assurdo poichσ $\check{\pi}_1(X, x_0) = Z$ come visto al §.6 mentre $\check{\pi}_1(Y, y_0) = 0$ poichσ Y σ contraibile.

§. 9. CONFRONTA TRA I FUNTARI π E $\check{\pi}$.

Sia X uno spazio paracompatto di Hausdorff, A un sottoinsieme chiuso di X e $x_0 \in A$. Poiche A e chiuso ogni ricoprimento $\alpha \in \mathrm{Cov}(X, A)$ puo pensarsi con indice variabile nel solo insieme V_α([1] pag. 249). Se α e localmente finito esiste un'applicazione continua

$$\varphi_\alpha : (X, A, x_0) \to (X_{\bar{\alpha}}, A_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}})$$

chiamata *l'applicazione haricentrica (o canonica)*, così definita: se $\{\lambda_i : X \to \to [0, 1]\}$ con $i \in V_\alpha$ è una partizione dell'unità subordinata ad α, allora $\varphi_\alpha(x)$ ha come coordinate baricentriche $\{\varphi_i(x)\}$. Se α non è localmente finito, poichè X è paracompatto, si può trovare un ricoprimento localmente finito β, $\beta > \alpha$, e definire semplicemente

$$\varphi_\alpha = p_\alpha^\alpha \varphi_\beta$$

Si può vedere facilmente che queste applicazioni sono ben definite a meno di omotopia e vale

(9,1) *PROPOSITIONE*: Se (X, A, x_0) è una terna triangolabile (anche infinita) con X spazio di Hausdorff paracompatto e A chiuso, allora

$$\check{\pi}_n(X, A, x_0) \cong \pi_n(X, A, x_0) \qquad \forall_n > 0$$

La dimostrazione è analoga a quella in Lee e Raymond ([3], pag. 420) con le opportune variazioni per i nervi puntati.

§. 1-0. IL FUNTORE $\check{\pi}_0$

Daremo ora un'interpretazione geometrica, almeno in alcuni casi particolari, dell'insieme $\check{\pi}_0(X, x_0)$. A tale scopo ricordiamo la nozione diquasi-compoponente con nessa di un puncto $x \in X$. ([1], pag. 254)

(10.1) *DEFINIZIONE*: Si chiama *quasi-componente connessa* del puncio $x \in X$ la intersezione di tutti i sottoinsiemi di X simultaneamente apertte chiusi contenenti x.
Allora vale:

(10.2) *PROPOSIZIONE*: Sia X uno spazio topologico *e* $x_0 \in X$. Esiste un'applicazione iniettiva

$$T : Q(X) \to \check{\pi}^0(X, x_0)$$

dove $Q(X)$ è l'insieme delle quasi-componenti connesse di X.
Dim. La costruzione dell'applicazione cercata procede per tappe.

a) Esiste un'applicazione suriettiva $t : X \to \check{\pi}_0(X, x_0)$.
Definiamo per ogni $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ un'applicazione

$$t_\alpha : X \to \pi_0(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}) \tag{10.3}$$

$$x \to c_\alpha(x)$$

dove $c_\alpha(x)$ è la componente connessa per archi di $X_{\bar{\alpha}}$ che contiene il vertice individuato da un indice $v \in V_\alpha$ tale che $x \in \alpha_v$. Ovviamente se $x \in \alpha_v$, la componente connessa per archi individuata da v' coincide con quella individuata da v poichè $x \in \alpha_v \cap \alpha_{v'} \neq \emptyset$.

Sia ora $\alpha < \beta$, se $x \in \beta_v$ aperot di β, esisterà un α_v tale che $\beta_v \subset \alpha_w$ e l'applicazione

$$p^\beta_{\alpha_*} : \pi_0(X_{\bar{\beta}}, P_{\bar{\beta}}) \to \pi_0(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}})$$

manderà la componente connessa per archi individuata da w in quella individuata da v. Possiamo allora definire la seguente applicazione

$$t : X \to \check{\pi}_0(X, x_0)$$

$$x \to \{c_\alpha(x)\}$$

b) L'applicazione t_α è localmente constante per ogni α.
Infatti ad ogni livello, cioè per ogni nervo, possiamo sempre trovare un intorno U di x contenuto in un aperto α_v di α. Tutti i punti di U avranno per immagine in t_α la medesima componente connessa per archi individuata da v.

c) Dalla b) risulta subito che t_α^{-1} $(c\ (x))$ è aperta e chiusa per ogni $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ e ogni $x \in X$. Allora

$$t^{-1}(\{c_\alpha(x)\}) \supseteq \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Cov}(X)} t_\alpha^{-1}(c_\alpha(x)) \supseteq \xi(x)$$

dove $\xi(x)$ è la quasi-componente connessa di x.

Quindi risulta ben definita l'applicazione:

$$T : Q(X) \to \check{\pi}_0(X, x_0)$$

$$\xi(x) \to \{c_\alpha(x)\}$$

d) L]applicazione T è iniettiva.
Infatti sia $\xi(x) = \bigcap_i B_i$ con B_i aperto e chiuso contenente x; se $\xi(x) \neq \xi(y)$ allora esiste un B_j tale che $y \notin B_j$. Allora per il ricoprimento α di X costituito dagli aperti B_j e CB_j si avrà

$$c_\alpha(x) \neq c_\alpha(y)$$

e quindi $\{c_\alpha(x)\} \neq \{c_\alpha(y)\}$ da cui la conclusione.

Esaminiamo ora alcuni casi particolari in cui T risulta biunivoca.

(10.4) *PROPOSIZIONE*: Se X è unione di componenti connesse aperte, allora le applicazioni

$$\Lambda : C(X) \to \check{\pi}_0(X, x_0) \qquad T : Q(X) \to \check{\pi}_0(X, x_0)$$

sono corrispondenze biunivoche, essendo $C(X)$ l'insieme delle componenti connesse di X.

Dim. Sia $X = \bigcup_{s \in S} X^s$ con X^s componente connessa aperta (e chiusa). Se $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ ha indice in V_α, gli insiemi

$$\alpha_v^s = \alpha_v \cap X^s \qquad v \in V_\alpha$$

costituiscono un ricoprimento aperto α^s di X^s. Gli aperti α_y^s sono aperti anche in X perc ui possiamo considerare il ricoprimento $'\alpha = \{a^s\}$ di X; inoltre tali ricoprimenti fatti sulle componenti connesse sono cofinali in $\mathrm{Cov}(X)$. Si ha così una corrispondenza biunivoca:

$$\lambda : C(X) \to \pi_0(X_{'\bar{\alpha}}, P_{'\bar{\alpha}})$$

tra le componenti connesse di X e quelle connesse per archi di $X_{'\bar{\alpha}}$.

D'altra parte le proiezioni tra nervi conservano le componenti connesse, per cui al limite si ha la corrisoindenza biunivoca Λ cercata.

Inoltre dalla biunivocità di Λ e dalla iniettività dell'applicazione $C(X) \to Q(X)$ segue la suriettività di T. Anzi nelle nostre ipotesi dalla commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[d] & \check{\pi}_0(X, x_0) \arrow[l, "\Lambda^{-1}"'] \\ Q(X) \arrow[ur, "T."'] & \end{tikzcd}$$

segue anche che $C(X)$ e $Q(X)$ siono in corrispondenza biunivoca.

La proposizione precedente implica

(10.5) *PROPOSIZIONE*: Se X è uno spazio localmente connesso, allora $\check{\pi}_0(X, x_0)$ è in corrispondenza biunivoca coll'insieme delle (quasi-) componenti di X.

(10.6) *PROPOSIZIONE*: Se X è uno spazio compatto, allora l'insieme $\check{\pi}_0(X, x_0)$ con la topologia di limite inverso è uno spazio compatto ed è omeormorfo allo spazio delle (quasi-) componenti connesse di X con la topologia quoziente.

Dim. Essendo X compatto, i ricoprimenti finiti di X, $\mathrm{Covf}(X)$, sono cofinali in $\mathrm{Cov}(X)$. Sia $\alpha \in \mathrm{Covf}(X)$. Allora $\rho_0(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}})$ è finito e con la topologia discreta è compatto; così pure è compatto $\check{\pi}_0(X, x_0)$ limite inverso di compatti.

L'insieme $Q(X)$ può essere identificato con lo spazio quoziente di X rispetto alla relazione d'ecuivalenza definita dalla partizione di X in quasi-componenti-.

Poichè l'applicazione canonica

$$X \to Q(X)$$

è continua risulta che $Q(X)$ è compatto, essendo evidentemente separato.

Daltra parte l'applicazione

$$T: Q(X \quad \check{\pi}_0(X, x_0)$$

è continua.poichè lo sono tutte le applicazioni

$$Q(X) \to \check{\pi} \; X_{\bar{\alpha}}, \quad {}_{\bar{\alpha}})$$

[cfr. la parte b) di (10.2)] .

Poichè $T(Q(X))$ è chiuso e T è iniettiva, per concludere che T è su, baxta far vedere che $T(Q(X))$ è denso in basta far vedere che $T(Q(X))$ è denso in $\check{\pi}_0(X, x_0)$; cioè in ogni insieme di una base diaperti di $\check{\pi}_0(X, x_0)$ si trova un elemento di $T(Q(X))$.

Ora una base per gli aperti di $\check{\pi}_0(X, x_0)$ è definita dal sistema $\{A_{\alpha_0}\}$ $\forall\, \alpha_0 \in \mathrm{Covf}(X)$ dove

$$A_{\alpha_0} = c_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} \pi_0(X_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\alpha}}),$$

essendo c_{α_0} un elemento (un aperto!) di $\pi_0(X_{\bar{\alpha}_0}, P_{\bar{\alpha}_0})$.

Se x è un punto di X tale che $t_{\alpha_0}(x) = c_{\alpha_0}$ allora è evidente che A_{α_0} contiene l'immagine di una quasi-componente di x tramite l'applicazione di t:

$$\{t_\alpha(x)\} \in A_{\alpha_0}$$

usando il simbolismo introdotto in (10.2).

Nelle nostre ipotesi la biunivocità di T ci assicura anche la bicontinuità, da cui la conclusione che $\check{\pi}_0(X, x_0)$ è omeomorfo a $Q(X)$ e a $C(X)$, poichè per uno spazio coniagato gli insiemi $C(X)$ e $Q(X)$ sono identici.

BIBLIOGRAFIA

[1] **S. Eilenberg, N. Steenrod**: *Fondations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press f19ă2)

[2] **S. Tl HU**: *Homotopy Theory*, Academic Press (19ă9)

[3] **Cl Nl Lee, Fl Raămond**: *Cech extensions of contravariant functors*, Trans. Am. Math. Soc. 133 f19a8); â1ă—â3â

[â] **Ml Mrowha**: *Uber Homotopiegruppen die der Cechschen Homologie zogeordnet sind,* Math-Ann. 177, 310—388 f19a8)

Received on 29. III. â97a

s.*tematico del l'Universita*
00â00 *ROMA (Italia)*
Iatituto Matematico del l'hl∂ersita
73â00 **LFCCF fItalia**)

GROUPES D' HOMOTOPIE DE ČECH

Resume

Dans ce travail on donne une définition de groupes d'homoropie à la Cech suivant l'ésprit de l'homologie à la Cech. Similiment on démontre que ce nouveau foncteur π satisfait presque outes les axiomes d'un système d'homotopie et coincide avec π pour certaines familles d'éspaces

A SHORT PROOF OF ITO'S FORMULA FOR STOCHASTIC DIFFERENTIALS OF GENERAL CONTINUOUS SEMIMARTINGALES

I. CUCULESCU

1. INTRODUCTION

This formula is proved in [6] relying on the appendix of [5]. It is generalised to noncontinuous semimartingales in [3], where for the continuous case the reader is sent to [6]. Our simplification consists first in avoiding the appendix in [5], and then in using the approximation lemma in the point 6 in order to reduce the proof to the case of a product. Of course, the first simplification is little feeled in the brownian case.

2. DEFINITIONS AND FACTS WHICH WE USE IN THE PROOF

a: We fix a probability space $\{E, \mathcal{K}, P\}$ wich is complete, a nondecreasing right continouos family $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[0,\infty)}$ of borel subfields of $\mathcal{K}$ such that $\mathcal{Z}_0$ contains all sets A in $\mathcal{K}$ with $P(A) = 0$.

b_1. The class $\mathcal{M}$ is defined as the class of all processes $M_t(w)$ $(t \in [0, \infty),\ w \in E)$ — named continuous local martingales — which are continuous in t, $\mathcal{Z}_t$ — measurable for every fixed t, $M_0 \equiv 0$ and such that there exists an ascending sequence $\tau_n \uparrow \infty$ of $(\mathcal{Z}_t)$ — stopping times such that, for every n, $M_{\min(t,\tau_n)}$ is a martingale.

b_2. If $M_t \in \mathcal{M}$, if τ is a stopping time and if $\sup_{t\leqslant\tau} |M_t|$ is integrable then $M_{\min(t,\tau)}$ is a martingale.

b_3. The class $\mathcal{M}^2$ is defined as the subclass of $\mathcal{M}$ consisting of those M_t which are martingales of the form $M(Y \mid \mathcal{Z}_t)$ with $Y \in L^2$. Every bounded $M \in \mathcal{M}$ is in $\mathcal{M}^2$.

b_4. The τ_n in b_1 may be chosen so that $M_{\min(t,\tau_n)}$ are in $\mathcal{M}^2$ (it suffices to take $\tau_n(\omega) = \inf\{t \mid |M_t(\omega)| \geqslant n\}$; due to the continuity of M_t, we have $\sup_{t\leqslant\tau_n} |M_t| \leqslant n$).

c. The class $\mathcal{V}$ is defined as the class of all processes $A_t(\omega)$ $(t \in [0, \infty), \omega \in E)$ which are continuous in t, $\mathcal{Z}_t$ — measurable for every fixed t, $A_0 \equiv 0$ and such that, for every ω and, $t_0 < \infty$, $A_t(\omega)$ has bounded variation as a function of $t \in [0, t_0]$.

d_1. For every $M \in \mathcal{M}$ there is an unique $A \in \mathcal{V}$ (which is even non-decreasing) such that $M^2 - A \in \mathcal{M}$(for $M \in \mathcal{M}^2$ it is a consequence of the Doob-Meyer decomposition of potentials of class (D); its unicity allows to piece together the A's corresponding to different $M_{\min(t,\tau)}$ which are in $\mathcal{M}^2$ — see b_4).

d_2. As a consequence of the unicity: $\mathcal{M} \cap \mathcal{V} = \{0\}$.

d_3. For every $M, N \in \mathcal{M}$ it follows from d_1 that there is an unique $A \in \mathcal{T}$, which we denote by $\langle M, N\rangle$, such that $MN - \langle M, N\rangle$ is in $\mathcal{M}$. $\langle M, N\rangle$ is linear in both arguments.

e_1. Let $\mathcal{P}$ be the borel field on $(0, \infty) \times E$ generated by all $(0, \tau]$ where τ runs over all stopping times

$$((0, \tau] = \{(t, \omega) \mid 0 < t \leqslant \tau(\omega),\ t < \infty\}.$$

e_2. Let $\mathcal{L}$ be the set of all $\mathcal{P}$-measurable C for which there is an ascending sequence $\tau_n \uparrow \infty$ of stopping times such that C is bounded on every $(0, \tau_n]$.

e_3. Let $\mathcal{L}^\infty$ be the subclass of $\mathcal{L}$ consisting of all bounded C.

e_4. If $C_t(\omega)$ is defined for $t \in [0, \infty)$, $\omega \in E$, with real values, if $C_t(\omega)$ is $\mathcal{Z}_t$ — measurable for every fixed t and if $C_t(\omega)$ is continuous in t then it is known that the restriction of C to $(0, \infty) \times E$ is in $\mathcal{L}$(if in the definitions e_1, e_2 we would have taken $[0, \infty) \times E$ and $[0, \tau_n]$ it would not be true).

f_1. For every $C \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{V}$ we define $\int C\, dA \in \mathcal{V}$ by the usual Stieltjes integral $\left(\int C\, dA\right)_t(\omega) = \int_{[0,t]} C_s(\omega)\, d_s A_s(\omega)$.

It is known that, for every $C \in \mathcal{L}$, $M \in \mathcal{M}$ there is an unique $\int C\, dM \in \mathcal{M}$ such that $\left\langle \int C\, dM,\ N\right\rangle = \int C\, d\langle M, N\rangle$ for all $N \in M$.

$$f_2 \cdot \int C_1 d \int C_2 dA = \int C_1 C_2\, dA, \int C_1 d \int C_2\, dM = \int C_1 C_2\, dM.$$

$$f_3. \left(\int C \varkappa_{(0,\tau]}\, dA\right)_t = \left(\int C\, dA\right)_{\min(\tau, t)}$$

$$\left(\int C \varkappa_{(0,\tau]}\, dM\right)_t = \left(\int C\, dM\right)_{\min(\tau, t)}$$

for $A \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{L}$. As a consequence:

$$\left(\int C\, dM\right)_t - \left(\int C\, dM\right)_s = \left(\int C \varkappa_{(s,t]}\, dM\right)_t \quad \text{for } s < t.$$

f_4. For $C = 1$ we get:

$$A_{\min(\tau, t)} = \left(\int \varkappa_{(0,\tau]}\, dA\right)_t,\ M_{\min(\tau, t)} = \left(\int \varkappa_{(0,\tau]}\, dM\right)_t.$$

g. In order to be able to compute $\int C\mathrm{d}M$ for $C \in \mathcal{L}$, $M \in \mathcal{M}$ we recall that:

g_1. $C \in \mathcal{L}^\infty, M \in \mathcal{M}^2$ implies $\int C\,\mathrm{d}M \in \mathcal{M}^2$.

g_2. $C_n \to C$ pointwise, C_n uniformly bounded in all variables including n, implies $\left(\int C_n\,\mathrm{d}M\right)_t \to \left(\int C\,\mathrm{d}M\right)_t$ in L^2 for all t.

g_3. $C_t(\omega) = Y(\omega)\,\chi_{(u,v]}(t)$, $Y\mathcal{Z}_u$ — measurable implies $C \in \mathcal{L}$, $\left(\int C\,\mathrm{d}M\right)_t = 0$ for $t \leqslant u$, $\left(\int C\,\mathrm{d}M\right)_t = Y(M_{\min(t,v)} - M_u)$ for $t > u (M \in \mathcal{M})$.

h. We define $\mathcal{J}$ as the class of all processes $X_t(\omega)$ $(t \in [0, \infty),\ \omega \in E)$ which do not depend on t and such that X_0 is $\mathcal{Z}_0$ — measurable.

i_1. By a continuous semimartingale we mean a process of the form $S = X + A + M$ where $X \in \mathcal{J}$, $A \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{M}$. This writing is unique: $X_t = S_0$ and for the rest see d_2.

i_2. If $S = X + A + M$ is a continuous semimartingale $(X \in \mathcal{J},\ A \in \mathcal{V},\ M \in \mathcal{M})$ and if $C \in \mathcal{L}$ then by $\int C\,\mathrm{d}S$ we mean $\int C\,\mathrm{d}A + \int C\,\mathrm{d}M$.

i_3. If $S^{(1)} = X^{(1)} + A^{(1)} + M^{(1)}$, $S^{(2)} = X^{(2)} + A^{(2)} + M^{(2)}$ are two continuous semimartingales $(X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathcal{J},\ A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{V},\ M^{(1)}, M^{(2)} \in \mathcal{M})$ then by $< S^{(1)}, S^{(2)} >$ we mean $< M^{(1)}, M^{(2)} >$.

3. THE FORMULA IN A SPECIAL CASE, REPLACING THE APPENDIX IN [5]

Proposition. If $M \in \mathcal{M}$ then $M^2 = 2\int M\,\mathrm{d}M + \langle M, M\rangle$ $\Big($we know — — 2. e_4 — that $M \in \mathcal{L}$ so $\int M\,\mathrm{d}M$ has a sense$\Big)$.

Proof.a. Let us suppose first that M is bounded. We know that $M^2 - \langle M, M\rangle \in \mathcal{M}$ so M^2 is a continuous semimartingale, $M^2 = X + A + N$ where $X = 0$, $A = \langle M, M\rangle$ and $N \in \mathcal{M}$. In order to show that $N = 2\int M\,\mathrm{d}M$ it will be sufficient, due to the uniciry in 2.i, to show that $M^2 - 2\int M\,\mathrm{d}M$ is in $\mathcal{V}$. This will follow if we prove that $M_t^2 - 2\left(\int M\,\mathrm{d}M\right)_t$ is nondecreasing in t i.e. that, for $s < t$:

$$M_t^2 - M_s^2 \geqslant 2\left(\int M\,\mathrm{d}M\right)_t - 2\left(\int M\,\mathrm{d}M\right)_s.$$

If $\Delta = \{s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = t\}$

$$M_\Delta(u, \omega) = \sum_{k=1}^{n} M_{t_{k-1}}(\omega)\, \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(u) \text{ then } |M_\Delta| \leqslant \sup |M| \text{ so } M_\Delta \in \mathcal{L}^\infty$$

and, when $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \to 0$, we have $M_\Delta \to M\chi_{(s,t]}$.

According to 2. g_2 and 2. f_3:

$\left(\int M_\Delta \, dM\right)_t \to \left(\int M\chi_{(s,t]} \, dM\right)_t = \left(\int M \, dM\right)_t - \left(\int M \, dM\right)_s$ in L^2 and even almost everywhere, if we take a subsequence. But (see 2. g_3):

$$2\left(\int M_\Delta \, dM\right)_t = 2\sum_{k=1}^{n} M_{t_{k-1}}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} (M_{t_k}^2 - M_{t_{k-1}}^2) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_{t_k}^2 - M_{t_{k-1}}^2) = M_t^2 - M_s^2$$ and the desired inequality follows.

b. In the general case, let $\tau_n \uparrow \infty$ be a sequence of stopping times such thta $M_{\min(t, \tau_n)}$ is bounded for every fixed n. We apply point a. to $M_{\min(t, \tau_n)} = \left(\int \chi_{(0, \tau_n]} \, dM\right)_t$. We get an equality in which instead of $\langle M, M\rangle$ figures (see 2.f_1 and 2.f_2): $\int \chi_{(0, \tau_n]} \, d\langle M, M\rangle$ and instead of $2\int M \, dM$ figures (see 2.f_2 taking into account that, due to 2.f_4, $\left(\int \chi_{(0, \tau_n]} \, dM\right) \chi_{(0, \tau_n]} = M\chi_{(0, \tau_n]}$) $2\int M\chi_{(0, \tau_n]} \, dM$ which equals (see 2.f_2) $\int \chi_{(0, \tau_n]} \, d\left(2\int M \, dM\right)$.

But this equality is nothing but the desired one „stopped at τ_n "(once more 2.f_4) and $\tau_n \to \infty$ finishes the proof.

4. EXPRESSIONS FOR PRODUCTS

a. If $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathcal{J}$ then $X^{(1)}X^{(2)} \in \mathcal{J}$.

b. If $X \in \mathcal{J}$, $A \in \mathcal{V}$ then $XA = \int X \, dA \in \mathcal{V}$

c. If $X \in \mathcal{J}$, $\mathcal{M} \in M$ then $X\mathcal{M} = \int X \, dM \in \mathcal{M}$ (see 2.g_3).

d. If $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{V}$ then $A^{(1)}A^{(2)} = \int A^{(1)} \, dA^{(2)} + \int A^{(2)} \, dA^{(1)} \in \mathcal{V}$ by an application of Fubini on each of the two triangles in which $[0, t] \times [0, t]$ is decomposed by the diagonal $y = x$, remarking that, due to the continuity of $(A^{(1)})_t \, (A^{(2)})_t$, the diagonal is not charged.

e. Let $A \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{M}$. We prove that $AM = \int A \, dM + \int M \, dA$. The reasonment in 3.b may be applyed to reduce the proof to the case when

A and M are bounded. If $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, then $(AM)_t = \sum_{k=0}^{n-1} (A_{t_{k+1}} M_{t_{k+1}} - A_{t_k} M_{t_k}) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{t_{k+1}}(A_{k+1} - A_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} A_{t_k}(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$. The second sum tends to $\left(\int A\chi_{(0,t]}\, dM\right)_t$ as a consequence of 2.g_2 and the last equals $\left(\int A\, dM\right)_t$ (see 2. f_4). The first sum, for a given ω, tends to $\int_{[0,t]} M_s(\omega)\, d_s A_s(\omega) = \left(\int M\, dA\right)_t(\omega)$ (this first sum is not of the form $\left(\int C\, dA\right)_t$ with $C \in \mathcal{L}$!) finishing the proof.

f. Finally, if $M^{(1)}, M^{(2)} \in \mathcal{M}$ then $M^{(1)} M^{(2)} = \int M^{(1)}\, dM^{(2)} + \int M^{(2)}\, dM^{(1)} + \langle M^{(1)}, M^{(2)}\rangle$ as an easy consequence of 3.

g. Summing together we have proved that

$$S^{(1)}S^{(2)} = S_0^{(1)}S_0^{(2)} + \int S^{(1)} dS^{(2)} + \int S^{(2)}\, dS^{(1)} + \langle S^{(1)}, S^{(1)}\rangle$$

for every two continuous semimartingales $S^{(1)}, S^{(2)}$.

5. STATEMENT OF ITO'S FORMULA

a. Theorem. Let $S^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, be n continuous semimartingales, let $F: R^n \to R$ be a function in $\mathcal{C}^2$ — Then:

$$F(S^{(1)}, \dots, S^{(n)}) = F(S_0^{(1)}, \dots, S_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial F}{\partial x^i}(S^{(1)}, \dots, S^{(n)})\, dS^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(S^{(1)}, \dots, S^{(n)})\, d\langle S^{(i)}, S^{(j)}\rangle.$$

(2.e_4 ensures us that the integrals have a sense).

b. We have seen at 4.g that the formula is true for $F(x,y) = xy$.

c. If the formula is true for F_1, F_2 the it is true for F_1F_2.

Proof. If the formula is true for a given F then it follows first that $F(S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ is a continuous semimartingale, then that, for $C \in \mathcal{L}$ (see 2.f_2):

$$\int C\, dF = \sum_{i=1}^{n} \int C \frac{\partial F}{\partial x^i}\, dS^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int C \frac{\partial F_2}{\partial x^i \partial x^j}\, d\langle S^{(i)}, S^{(j)}\rangle$$

If the formula is true for F_1, F_2 then (2. f_1);

$$\langle F_1, F_2\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \int \frac{\partial F}{\partial x^i}\, dS^{(i)}, \int \frac{\partial F_2}{\partial x^j}\, dS^{(j)} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int \frac{\partial F_1}{\partial x^i} \frac{\partial F_2}{\partial x^j}\, d\langle S^{(i)}, S^{(j)}\rangle.$$

If we apply 4.g to $F_1(S^{(1)}, \ldots, S^{(n)})$ and $F_2(S^{(1)}, \ldots, S^{(n)})$ and use the above two formulas we get:

$$(F_1F_2)(S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}) = (F_1F_2)(S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n} \int F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x^i} dS^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int F_1 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^i \partial x^j} d < S^{(i)}, S^{(j)} > + \sum_{i=1}^{n} \int F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x^i} dS^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int F_2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^i \partial x^j} d < S^{(i)}, S^{(j)} > + \sum_{i,j=1}^{n} \int \frac{\partial F_1}{\partial x^i} \frac{\partial F_2}{\partial x^j} d \langle S^{(i)}, S^{(j)} \rangle$$

This becomes Ito's formula for F_1F_2 if we use the expressions (Leibnitz of) $\frac{\partial}{\partial x^i}(F_1F_2)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(F_1F_2)$.

d. It follows from b.c. that the formula is valid for every polynomial F.

6. THE APPROXIMATION LEMMA

Lemma. If $F: R^n \to R$ is in $\mathcal{C}^2$ and $K \subset R^n$ is compact, then there exists a sequence P_k of polynomials such that, uniformly on K:

$$P_k \to F, \quad \frac{\partial P_k}{\partial x^i} \to \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^i \partial x^j} \to \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}$$

Proof. Conseder a $G \in \mathcal{C}^2$, with compact support $K_1 \supset K$, which coincides with F on an open set containing K. We take a positiv c smaller than $(\text{diam } K_1)^{-2}$ and denote

$p_k(t_1, \ldots, t_n) = (1 - ct_1^2)^k \ldots (1 - ct_n^2)^k \ \alpha_k$ where α_k is chosen so that $\int_C p_k(x)\, dx = 1$, C being the cube $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i| \leqslant c^{-\frac{1}{2}}$. Namely: $\left(\int_{-c^{-\frac{1}{2}}}^{c^{-\frac{1}{2}}} (1 - ct^2)^k\, dt\right)^n \alpha_k = 1$ or $\left(\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^k\, dt\right)^n c^{-\frac{n}{2}} \alpha_k = 1$.

If $S_\varepsilon = \{(t_1, \ldots, t_n) | \max |t_i| \leqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon < 1)$ then $\sup_{x \in C \setminus S_\varepsilon} p_k(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_k(1 - c\varepsilon^2)^k = C_1 \frac{(1 - c\varepsilon^2)^k}{\left(\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^k\, dt\right)^n} \leqslant \frac{C_1(1 - c\varepsilon^2)}{((1 - \delta^2)^k \cdot (2\delta))^n} \to 0$ when $k \to \infty$ if we choose δ such that $\frac{1 - c\varepsilon^2}{(1 - \delta^2)^n} < 1$;this is possible because the $\lim_{\delta \to 0}$ in the left member is $1 - c\varepsilon^2 < 1$ We define now $R_kG(x) = \int p_k(x - y)\, G(y)\, dy = \int p_k(y)\, G(x-$

$-y)\,dy$; it is clear that R_kG is a polynomial and that $\frac{\partial R_kG}{\partial x^i} = R_k \frac{\partial G}{\partial x^i}$. If $x \in K_1$ then $G(x-y) \neq 0$ requires $x - y \in K_1$ hence $||y|| \leqslant \operatorname{diam} K_1 \leqslant c^{-\frac{1}{2}}$ i.e. $y \in C$. Consequently, for $x \in K_1$:

$$|R_kG(x) - G(x)| = \left|\int_C p_k(y)\, G(x-y)\, dy - \int_C p_k(y)\, G(x)\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{C \setminus S_\varepsilon} p_k(y)\, |G(x-y) - G(x)|\, dy + \int_{S_\varepsilon} p_k(y)\, |G(x-y) - G(x)|\, dy$$

$$\leqslant 2 \sup |G| \sup_{C \setminus S_\varepsilon} p_k + \sup_{y \in S_\varepsilon} |G(x-y) - G(x)| \int_C p_k(y)\, dy.$$

Making first $k \to \infty$ and then $\varepsilon \to 0$ we see that $R_kG \to G$ uniformly on K. The remarks after the definition of $R_k\, G$ show that the same is true for the derivatives of the first two orders. As, on K, G and its derivatives coincide with F and its derivatives the lemma is proved.

7. PROOF OF ITO'S FORMULA

a. Suppose first that, if, as in 2.i, $S^{(i)} = X^{(i)} + A^{(i)} + M^{(i)}$ then $X^{(i)}$, $A^{(i)}$, $M^{(i)}$ are all bounded. Then F occurs only by its values on compact $K \subset R^n$. We apply lemma 6 to F and K, get a sequence P_k of polynomials, apply Ito's formula to P_k and make $k \to \infty$. In the right member we have a sum of terms of the types: $P_k(S_0^{(i)}, \ldots, S_0^{(n)}), \int C_k dA, \int C_k dM$; the usual dominated convergence theorem is to be applyed to the second type, 2.g_2 to the third, and Ito's formula for F follows.

b. We prove it now in the case when $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$ are bounded, choosing a sequence $\tau_n \uparrow \infty$ of stopping times such that we may apply the conclusion of point a. to $(S^{(i)})_{min(t,\, \tau_n)} = S_0^{(i)} + \left(\int \chi_{(0,\, \tau_n]}\, dS^{(i)}\right)_t$. This is possible: $\tau_n = \inf\{t \,||A_t^{(i)}| \geqslant n$ or $|M_t^{(i)}| \geqslant n\}$. In the same way as in 3.b, using 2.f, we see that Ito's formula applyed to the „stopped" S's gives Ito's formula for the S's „stopped" at τ_n. As for $n \to \infty$ every t is „reached" the formula follows.

c. In the general case we replace $S^{(i)}$by $S^{(i)}\chi_A$ with $A \in \mathcal{F}_0$ chosen such that $S_0^{(i)}\chi_A$ are bounded. This means to replace $X^{(i)}$ by $X^{(i)}\chi_A$, $A^{(i)}$ by $A^{(i)}\chi_A = \int \chi_{(0,\, \tau]}\, dA^{(i)}$ and $M^{(i)}$ *by* $M^{(i)}\chi_A = \int \chi_{(0,\, \tau]}\, dM^{(i)}$ where τ is the stopping time equal to 0 on $\complement A$ and to $+\infty$ on A. We remark that, for $B \in \mathcal{V} \cup \mathcal{M}$ we have $B_{min(t,\tau)} = B_t\chi_A$. This shows that, if we apply Ito's formula to $S^{(i)}\chi_A$ (according to point *b.*) then using 2.f_2, 2.f_4 we can „take" the χ_A from the differentials and put is as a multiplicator in the integrands. Then we may

drop the χ_A which multiplicates the S's in the integrands and an application of $2.f_3$ allows now to take the χ_A from the integrands and to put it as a multiplicator outside the integrals. Finally, if we multiply the obtained relation by χ_A we get the desired formula on A. But A may be maked run over a sequence filling E.

REFERENCES!

[1] **I. Cuculescu.** *Spectral families and stochastic integrals.* Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées, tome XV, 2 1970, p. 201–221.

[2] **C. Doleans.** *Existence du processus croissant naturel associe a un potentiel de la classe D. Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie, vol.*. 9 1968 p. 309–314

[3] **C. Doleans-Dade, P. A. Meyer.** *Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales.* Seminaire de Probabilites IV, Lecture Notes in Math. 124, p. 77–107 Springer Verlag 1970, Berlin, Heidelberg, New-York

[4] **P. A. Meyer.** *Probabilities and Potentials,* Blaisdell 1966, Boston.

[5] **P. A. Meyer.** *Integrales stochastiques.* Expose I, Seminaire de Probabilites I, Lecture Notes in Math. 39, Springer 1967, p. 72–94

[6] **P. A. Meyer.** *Integrales stochastiques* Exposé II, Seminaire de Probabilites I, Lecture Notes in Math. 39, Springer 1967, p. 95–117.

[7] **Murali Rao.** *On the decomposition theorem of Meyer,* Math. Scandinavica 24(1969) p. 66–79

Received on 10 April 1973

University of Bucharest
Faculty of Mathematics and Mechanics

DECODING DEVICE FOR GILBERT CHANNEL USING THE ENTROPIC ALGORITHM OF RECOGNITION

V. CUPERMAN and S. GUIAŞU

In the present paper the entropic algorithm of recognition is applied to establish a decoding device for Gilbert communication channel, taking into account the statistical description of the noise on such a channel.

The usual algebraic codes ignore the statistical description of the noise on the communication channel, taking into account only the maximum number of the possible errors or the length of the possible burst-errors occurring in a given succession of signals. They may be utilized for arbitrary communication channels. In the same time, the components of the syndrome are considered as being independent (excepting the well-known relation $S_{qj} = (S_j)^q$ in GF(q)).

In the present paper we shall consider not an arbitrary communication channel but a particular one, i.e. the well-known Gilbert channel. Using the statistical description of this channel we shall show that the components of the syndrome are not independent. Considering the decoding process as a recognition process (taking into account both the received sequence of signals and the statistical description of the noise we want to recognize, as quickly as possible, the corresponding transmitted sequence at the input of the communication channel) we intend to establish a decoding strategy, i.e. an algorithm of recognition, giving us a hierarchy of the syndrome's components which must be examined.

We shall utilize here the entropic algorithm of recognition given independently by Lewis [1] and Landa [2], using the presentation given by Guiaşu [3]. Let us suppose that we have a set of entities $\mathcal{E}$ and we want to recognize an unknown entity e belonging to $\mathcal{E}$. Let us suppose further that it is not possible to observe the entity e directly but we may choose some functions defined on $\mathcal{E}$ — called the characteristics of the entities from the set $\mathcal{E}$ — and observe the values taken on by these functions at the unknown entity e. Each such observation gives us only partial information about the entity e, namely it specifies a subset of $\mathcal{E}$ to which e must belong. According to the entropic algorithm of recognition it is necessary, at every moment, to choose

and to observe firstly the characteristic supplying the largest amount of information, i.e. eliminating the largest amount of uncertainty. The details of the elaboration of this algorithm may be found in [3].

The Gilbert channel is an additive binary communication channel having two states: G — the „good" state, and B — the "bad" state, such that the probability to pass from the state B to the state G is equal tot the number p and the probability to pass frcm the state G to the state B i. equal to the number P. In the same time, if the channel's state is B, an arbitrary signal may be altered with the probability given by the number h. Consequently, a Gilbert channel is characterized by the trhee parameters $\mathcal{P}$, p and h. This channel was introduced in [4].

Let $\alpha \in \mathcal{GX}(2^4)$ be a primitive element, the root of the irreducible polynomial $\mathcal{X}^4 + \mathcal{X} + 1$ over $GF(2)$. To simplify the writing let us replace α^i by the integer number i, for $i = 0, 1, 2, \ldots, 14$. Because $\alpha^i \in GF(2^4)$, $(i = 0, 1, \ldots, 14)$, every such power of α is a vector having four components belonging to $GF_{(2)}$, i.e.

$$\alpha^0 = 1000; \quad \alpha^4 = 1100; \quad \alpha^8 = 1111; \quad \alpha^{12} = 1111;$$

$$\alpha^1 = 0100; \quad \alpha^5 = 0110; \quad \alpha = 0101; \quad \alpha^{13} = 1011;$$

$$\alpha^2 = 0010; \quad \alpha^6 = 0011; \quad \alpha^{1}{}_{0} = 1110; \quad \alpha^{14} = 1001.$$

$$\alpha^3 = 0001; \quad \alpha^7 = 1101; \quad \alpha^{11} = 0111;$$

Let us denote by $\square$ the vector having all four components equal to zero. The addition table in $GF(2^4)$ may be obtained immediately (see the table 1).

Table 1

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	$\square$	4	8	14	1	10	13	9	2	7	5	12	11	6	3
1	4	$\square$	5	9	0	2	11	14	10	3	8	6	13	12	7
2	8	5	$\square$	6	10	1	3	12	0	11	4	9	7	14	13
3	14	9	6	$\square$	7	11	2	4	13	1	12	5	10	8	0
4	1	0	10	7	$\square$	8	12	3	5	14	2	13	6	11	9
5	10	2	1	11	8	$\square$	9	13	4	6	0	3	14	7	12
6	13	11	3	2	12	9	$\square$	10	14	5	7	1	4	0	8
7	9	14	12	4	3	13	10	$\square$	11	0	6	8	2	5	1
8	2	10	0	13	5	4	14	11	$\square$	12	1	7	9	3	6
9	7	3	11	1	14	6	5	0	12	$\square$	12	2	8	10	4
10	5	8	4	12	2	0	7	6	1	12	$\square$	14	3	9	11
11	12	6	9	5	13	3	1	8	7	2	14	$\square$	0	4	10
12	11	13	7	10	6	14	4	2	9	8	3	0	$\square$	1	5
13	6	12	14	8	11	7	0	5	3	10	9	4	1	$\square$	2
14	3	7	13	0	9	12	8	1	6	4	11	10	5	2	$\square$

We are interested here in the single, double and triple error-patterns only. To every such an error-pattern it is possible to attach a distinct vector $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_5)$, i.e. the respective syndrome. The other components of the syndrome are well-defined by the equalities

$$S_{2j} = (S_j)^2, \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Now it is easy to compute the syndrome for every error-pattern mentioned above. As a matter-of-fact for every single error it coresponds a vector having 14 zero components and only one component equal to 1, corresponding to the single altered position. The corresponding polynomial for e_i is

$$e_i(\mathcal{X}) = a_0 + a_1 \mathcal{X} + \ldots + a_{14}\mathcal{X}^{14},$$

where $a_i = 1$, $a_j = 0$, for $j = 0, 1, \ldots, 14$; $j \neq i$. We shall use both the symbol e_i and the polynomial $e_i(\mathcal{X})$ to represent the single error in the position $(i + 1)$, $(i = 0, 1, \ldots, 14)$.

Every double-error is a vector $e_{i,j}$ having all zero components excepting the i-th and the j-th components which are equal to 1, corresponding to the alteration of the $(i + 1)$ — th position and respectively of the $(j + 1)$-th position. The corresponding polynomial will be

$$e_{i,j}(\mathcal{X}) = a_0 + a_1\mathcal{X} + \ldots + {}_{m14}\mathcal{X}^{14}$$

where $a_i = a_j = 1$ and $a_k = 0$, for every $k = 0, 1, \ldots, 14$; $k \neq i,j$. We shall use either $e_{i,j}$ or $e_{i,j}(\mathcal{X})$ to denote such a double-error pattenr.

Similarly for the triple-error pattern $e_{i,j,k}$ or $e_{i,j,k}(\mathcal{X})$.

Using the addition-table 1, the syndrome may be calculated without any difficulty. To give an example, for e_5 (or $e_5(\mathcal{X})$), i.e. for the single error pattern occurring in the sixth position, we obtain $e_5(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^5$ and the corresponding syndrome eill be

$$\mathcal{S}_1 = e_5(\alpha) = \alpha_5, \qquad \mathcal{S}_3 = e_5(\alpha^3) = \alpha_0, \qquad \mathcal{S}_5 = e_5(\alpha^5) = \alpha^{10}.$$

In this way, to e_5 it corresponds the vector

$$e_5 \rightarrow (\alpha^5, \alpha^0, \alpha^{10})$$

denoted, in a simpler manner, by 5.0.10. We shall write

$$e_5 = 5.0.10$$

reading that the single error e_5 has the syndrome: 5 for $\mathcal{S}_1$ *and* 0 for $\mathcal{S}_3$ *and* 10 for $\mathcal{S}_5$, the point having here the signification of the conjunction „and". We shall call 5.0.10 (or the vector $(\alpha^5, \alpha^0, \alpha^{10})$) to be the (syndrome representation" of the error-pattern e_5.

For the double-error pattern the syndrome representation may be obtained in the same way. For instance, let us consider thed ouble-error occurring in the 8-th and 13-th positions, i.e. the vector $e_{7,12}$. The corresponding polynomial is

$$e_{7,12}(\mathscr{X}) = \mathscr{X}^7 + \mathscr{X}^{12}$$

and we obtain for the syndrome's components

$$\mathcal{S}_1 = e_{7,12}(\alpha) = \alpha^7 + \alpha^{12} = \alpha^2,$$

$$S_3 = e_{7,12}(\alpha^3) = \alpha^6 + \alpha^6 = \square,$$

$$\mathcal{S}_5 = e_{7,12}(\alpha^5) = \alpha^5 + \alpha^0 = \alpha^{10}.$$

Therefore, the syndrome representation is

$$e_{7,12} = 2.\square.10$$

Generally, for an arbitrary error-paternt $e(\mathscr{X})$ the components of the syndrome may be calculated by the equiality

$$\mathcal{S}_k = e(\alpha^k) = (\alpha^k)$$

where $\mathrm{r}(X)$ is the polynomial corresponding to the received vector. (For the codification we can use a BCH code, having as generator function the polynomial

$$g(\mathscr{X}) = (\mathscr{X}^4 + \mathscr{X} + 1)(\mathscr{X}^4 + \mathscr{X}^3 + \mathscr{X}^2 + \mathscr{X} + 1)(\mathscr{X}^2 + \mathscr{X} + 1))$$

For the decoding devide it is sufficient to know the particular error-pattern which occurred.

Therefore, we may interpret the decoding process as being a recognition process. The entities are the error-patterns. The a priori probabilities of these entities are just the probabilities of different errors characterizing the perturbation (the noise) on the given communication channel. The characteristics are the components of the syndrome, in our case

$$\mathcal{S}_1 = \mathrm{r}(\alpha), \quad \mathcal{S}_3 = \mathrm{r}(\alpha^3), \quad \mathcal{S}_5 = \mathrm{r}(\alpha^5).$$

Every such characteristic may have 16 possible values namely α^i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, 14)$ or $\square$.

Let us choose a Gilbert channel having the parameters

$$P = 1{,}43.10^{-5}; \quad h = 0{,}745; \quad p = 0{,}246$$

The mean probability of error per symbol is in this case

$$p_m = \frac{P}{P+p}(1-h) = 1{,}46.\,10^{-5}.$$

These values of parameters were obtained in Cuperman [5] by approximation of the experimental approach given on Alexander, Gryb and Nast [6].

The computation of the probabilities of the one, two and three error-patterns on this channel gives us

$$\sum_{i=0}^{14} p(e_i) + \sum_{\substack{i=0\\ j>i}}^{13} p(e_{i,j}) = 8{,}105\ p_m,$$

$$\sum_{i=0}^{14} p(e_i) + \sum_{\substack{i=0\\ i<j\leqslant i+3}}^{13} p(e_{i,j}) = 7{,}780\ p_m,$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i<j<k}}^{12} p(e_{i,j,k}) = 0{,}84\ p_m.$$

Tabel 2a

Error-patern	Syndrome	Probability/p_m	Probability
e_0	0.0.0.	0,56140	0,0693
e_1	1.3.5	0,45350	0,0560
e_2	2.6.10	0,39300	0,0486
e_3	3.9.0	0,34030	0,04â4
e_4	4.12.5	0,35910	0,0420
e_5	5.0.10	0,33220	0,0410
e_6	6.3.0	0,32520	0,0402
e_7	7.6.5	0,32380	0,0400
e_8	9.12.0	0,33220	0,0410
e_9	10.0.5	0,34030	0,0420
e_{11}	11.3.10	0,35910	0,0444
e_{12}	12.6.0	0,39300	0,0486
e_{13}	13.9.5	0,45350	0,0560
e_{14}	14.12.10	0,56140	0,0693
$e_{0,1}$	4.14.10	0,10796	0,0134
$e_{0,2}$	8.13.5	0,06167	0,0075
$e_{0,3}$	14.7. □	0,03410	0,0043
$e_{0,4}$	1.11.10	0,01718	0,0023
$e_{1,2}$	5.2.0	0,08723	0,0108
$e_{1,3}$	9.1.10	0,0493	0,0061
$e_{1,4}$	0.10. □	0,02757	0,0035
$e_{1,5}$	2.14.0	0,01552	0,0010
$e_{2,3}$	6.5.5	0,07651	0,0095
$e_{2,4}$	10.4.0	0,04252	0,0053
$e_{2,5}$	1.13.	0,02387	0,0029
$e_{2,6}$	3.2.5	0,01349	0,0016
$e_{3,4}$	7.8.10	00,7136	0,0086

Table 2b.

Error-patern	Syndrome	Probability/p_m	Probability
$e_{3,5}$	11.7.5	0,03891	0,0049
$e_{3,6}$	2.1. □	0,02193	0,0027
$e_{3,7}$	4.5.10	0,01239	0,0015
$e_{4,5}$	8.11.0	0,06557	0,0081
$e_{4,6}$	12.10.10	0,03696	0,0046
$e_{4,7}$	3.4. □	0,02089	0,0025
$e_{5,6}$	9.14.5	0,06367	0,0079
$e_{5,7}$	13.13.0	0,03600	0,0045
$e_{5,7}$	4.7. □	0,02044	0,0025
$e_{6,8}$	10.2.10	0,06292	0,0078
$e_{6,8}$	14.1.5	0,03572	0,0045
$e_{6,7}$	5.10. □	0,02044	0,0025
$e_{7,8}$	11.5.0	0,06292	0,0078
$e_{7,9}$	0.4.10	0,03600	0,0045
$e_{7,10}$	6.13. □	0,02089	0,0025
$e_{7,11}$	8.2.0	0,01239	0,0015
$e_{8,9}$	12.8.5	0,06367	0,0079
$e_{8,10}$	1.7.0	0,03696	0,0046
$e_{8\ 11}$	7.1. □	0,02193	0,0027
$e_{8,12}$	9.5.5.	0,01349	0,0016
$e_{9,10}$	12.11.10	0,06557	0,0081
$e_{9,11}$	2.10.5	0,03891	0,0049
$e_{9,12}$	8.4. □	0,02389	0,0029
$e_{9,13}$	10.8.10	0,01552	0,0019
$e_{10,11}$	14.14.0	0,06913	0,0086
$e_{10,12}$	3.13.10	0,04252	0,0053
$e_{10,13}$	9.7. □	0,02757	0,0035

Table 2c

Error-pattern	Syndrome	Probability/p_m	Probability
$e_{10\ 14}$	11.11.0	0,01918	0,0024
$e_{11\ 12}$	0.2.5	0,07561	0,0094
$e_{11\ 13}$	4.1.0	0,04903	0,0061
$e_{11\ 14}$	10.10. □	0,03410	0,0043
$e_{12\ 13}$	1.5.10	0,08723	0,0108
$e_{12\ 14}$	2.8.0	0,10796	0,0134
e_{1314}	10.8. □	0,02076	0,0025
$e_{0\ 1\ 2}$	11.11. □	0,01681	0,0020
$e_{1\ 2\ 3}$	12.14. □	0,01454	0,0017
$e_{2\ 3\ 4}$	13.2. □	0,01332	0,0016
$e_{3\ 4\ 5}$	14.5. □	0,01265	0,0015
$e_{4\ 5\ 6}$	0.8. □	0,01232	0,0015
$e_{5\ 6\ 7}$	1.11. □	0,01222	0,0015
$e_{6\ 7\ 8}$	2.14 □	0,01232	0,0015
$e_{7\ 8\ 0}$	3.2. □	0,01265	0,0015
$e_{8\ 111}$	4.5. □	0,01332	0,0016
$e_{10\ 12}$	5.8. □	0,01454	0,0017
$e_{10\ 11\ 13}$	6.11. □	0,01681	0,0020
$e_{11\ 12\ 14}$	7.14. □	0,02086	0,0025

In the table 2 the probabilities $p(e_i)$, $(0 \leqslant i \leqslant 14)$; $p(e_{i,j})$, $(0 \leqslant i \leqslant 13;$ $i \leqslant j \leqslant i+6)$ and $p(e_{i,j,k})$, $(0 \leqslant i \leqslant 11,\ i < j \leqslant i+2; j < k \leqslant j+2)$ are given together to the syndrome $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_5$.

Now, it is easy to evaluate the probability $p(\alpha)$ of the value α^l of $\mathcal{S}_1$, for every $l = 0, 1, \ldots, 14$ or $\square$ and we have these values in the table 3. Similarly, the tables 4 and 5 give us respectively the probabilities $p_3(l)$ and $p_5(l)$ of the different values taken on by the characteristics $\mathcal{S}_3$ and $\mathcal{S}_5$

Introducing the entrophy

$$H_k = -\sum_{l=0}^{14} p_k(l) \log p_k(l) - p_k(\square) \log p_k(\square), \qquad (k = 1, 3, 5),$$

we obtain the values

$$H_1 = 3{,}887 > H_3 = 3{,}437 > H_5 = 1{,}818.$$

Therefore, the larges amount of uncertainty will be removed by the verification of the first characteristic, i.e. If this first characteristic takes on the value o, for instance, then we still have five possibilities, namely

e_0	0.0.0.	0,0693
$e_{1,4}$	0.10.$\square$	0,0035
$e_{7,9}$	0.4.10	0,0045
$e_{11,12}$	0.0.5	0,0094
$e_{5,6\,7}$	0.8.$\square$	0,0015

In this new situation we obtain for the entropy the following values

$$H_3 = 0{,}40800 > H_5 = 0{,}40346$$

such that the next characteristic which must be verified is $\mathcal{S}_3$. Now, if this characteristic $\mathcal{S}_3$ takes on the value 4 we obtain the entity (i.e. the error-pattern) $e_{7,9}$, and so on.

The discussin may be continued in the same way and, finally, we obtain the algorithm of recognition given in the figures 1—3.

Therefore, having a statistical description of the communication channel we can use the algorithm of recognition at the decofing, utilizing the algebric codes only for codification. Also, is it easy to see that the computation of the characteristic $\mathcal{S}_5$ is seldom necessary.

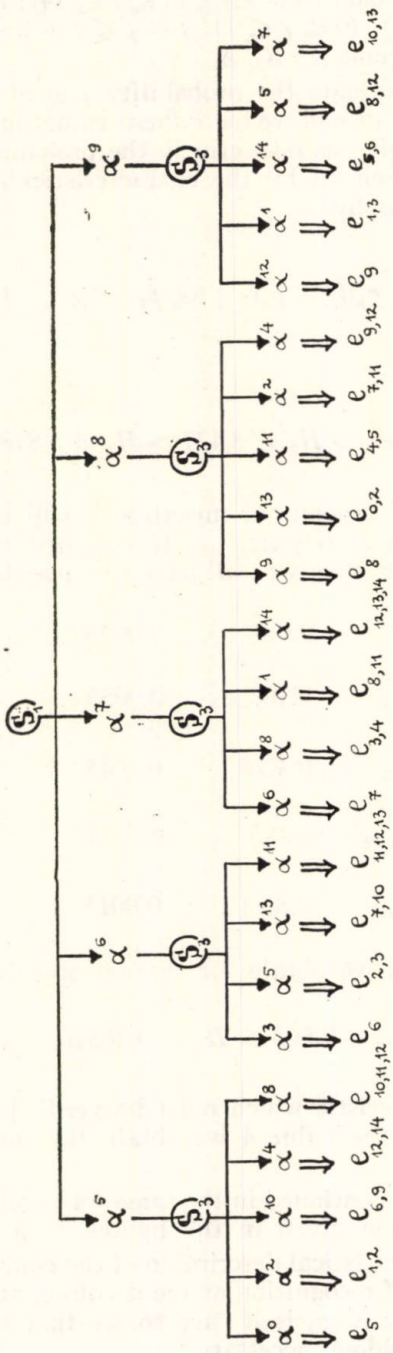


Fig. 1

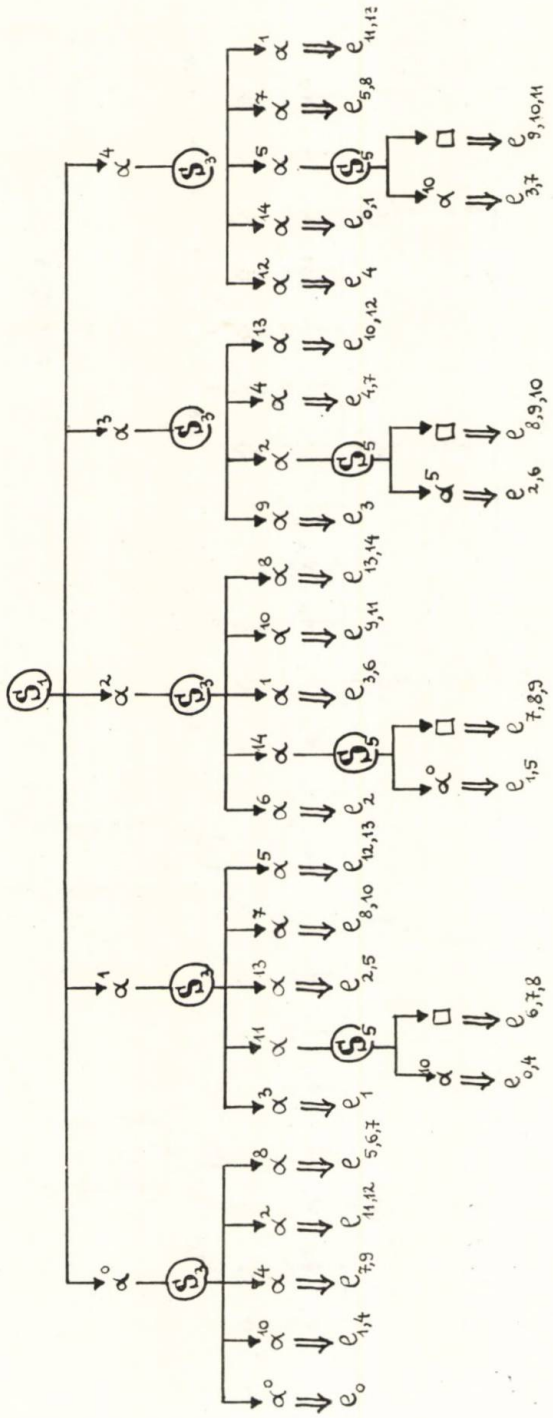


Fig. 2

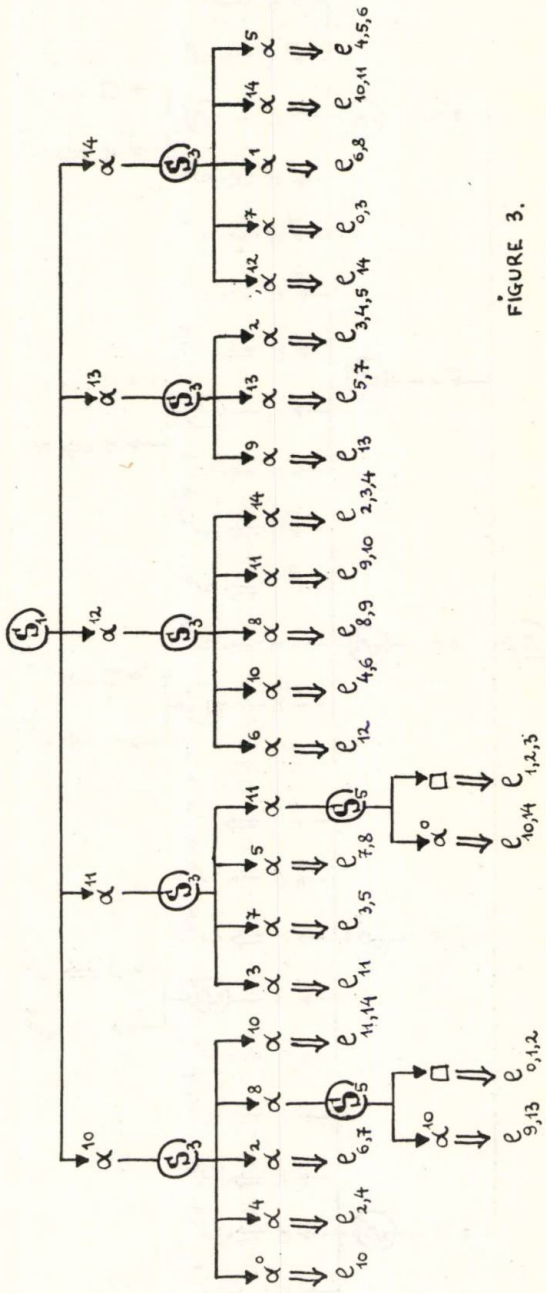


FIGURE 3.

Fig. 3

Table 3

l	$p_1(l)$
0	0,0882
1	0,0781
2	0,0730
3	0,0553
4	0,0671
5	0,0635
6	0,0542
7	0,0538
8	0,0602
9	0,0601
10	0,0638
11	0,0615
12	0,0709
13	0,0621
14	0,0882
□	0,0000

Table 4

l	$p_2(l)$
0	0,1523
1	0,0221
2	0,0342
3	0,1406
4	0,0227
5	0,0343
6	0,1372
7	0,0178
8	0,0375
9	0,1406
10	0,0198
11	0,0264
12	0,1523
13	0,0227
14	0,0375
□	0,0000

Table 5

l	$p_s(l)$
0	0,3185
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0000
4	0,0000
5	0,3032
6	0,0000
7	0,0000
8	0,0000
9	0,0000
10	0,3184
11	0,0000
12	0,0000
13	0,0000
14	0,0009
□	0,0599

REFERENCES

[1]. **Lewis, P. M.,** *The characteristic selection problem in recognition systems.* IRE Trans. Inform Theory, 8, 171—178, 1962.

[2]. **Landa, L. N.,** *Logical-informational algorithm for learning theory.* Psychological Journal (in Russian), 2, 19—40, 1962.

[3]. **Guiaşu, S.,** *On the most rational algorithm of recognition.* Kybernetik (Germany), 5, 109—113, 1968.

[4]. **Gilbert, E. N.,** *Capacity of a burst-noise chanel,* Bell System Techn. Journal, 39, September 1253—1265, 1960.

[5]. **Cuperman, V.,** *An upper bound of error probability on the Gilbert channel,* IEEE Transactions on Comm. Techn., October, 1969

[6]. **Alexander, A., A.** Gryb, R.M., Nast, D.W., *Capabilities of the telephone networks for data transmission.* Bell System Techn. Journal, 39, May, 431—476 1960.

Received on 29 IV 1973

University of Bucharest
Faculty of Mathematics and Mechanics

ASUPRA SPAȚIILOR RIEMANNIENE V_2 CU CARACTERISTICE DREPTE

LIVIU NICOLESCU

În această notă se determină spațiile Riemann V_2 care admit caracteristice drepte paralele sau drepte ce formează un fascicol cînd spațiul este raportat la un sistem de coordonare izoterme, dîndu-se forma canonică a metricii acestor spații. Anumite proprietăți generale ale unor astfel de spații au fost determinate de Ion. D. Teodorescu [1], [2], [3] însă nu au fost determinate aceste spații cînd toate caracteristicele sînt drepte.

Se arată că, în cazul în care dreptele caracteristice reale sînt paralele, aceste spații admit o metrică de tip Schapiro, dată pentru spațiile V_n de $n-2$ ori proiective.

În particular se obțin spațiile Vagner și spațiile cu curbură constantă.

*

Se știe că ([4], I, p. 179) curbele autoparalele ale unui spațiu bidimensional $A_2(x, y)$ cu conexiune afină simetrică sînt definite de ecuația

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\frac{dy}{dx} + \Gamma^2_{11}$$

Rezultă că [1] prin fiecare punct $P(x, y)$ trec trei curbe autoparalele $y = y(x)$ pentru care derivata a doua $\frac{d^2y}{dx^2}$ este nulă în P. Deci, direcțiile $\frac{dy}{dx}$ corespunzătoare, denumite direcții caracteristice, sînt date de ecuația

$$(2) \quad \Gamma^2_{11}dx^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\,dx^2dy - (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\,dxdy^2 - \Gamma^1_{22}dy^3 = 0$$

Extinzînd clasificarea Boruvka-Vrănceanu [5] (*v* și [4], II, p. 382), se spune [1] că A_2 este de prima, de a doua sau de a treia speță după cum direcțiile caracteristice $\frac{dy}{dx}$ sînt distincte, două sau toate trei coincid; aceasta revine la condiția că ecuația (2) are trei rădăcini distincte în $y' = \frac{dy}{dx}$, o rădăcină dublă sau o rădăcină triplă.

Se spune că spațiul A_2 este cu caracteristice drepte, cînd ecuația (2) admite cel puțin o integrală liniară; atunci familia respectivă de curbe caracteristice este constituită din caracteristice drepte (v. și [4], III, p. 149).

Se știe [4] că dacă spațiul riemannian V_2 este raportat la un sistem de coordonate izoterme, metrica lui este de forma:

$$dx^2 = e^{2\varphi}(dx^2 + dy^2) \tag{3}$$

unde φ este o funcție de variabilele x, y.

Din (3) rezultă că simbolurile lui Christoffel de speța a doua sînt date de formulele:

$$\left|{}^{i}_{jk}\right| = -\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j - \delta_{jk}\varphi_i \tag{4}$$

unde $i, j, k = 1, 2$, iar $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$

Din (4) rezultă componentele conexiunii

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Deci ecuația (2) se scrie

$$(1 + y'^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y'\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0 \tag{5}$$

Regăsin [2] următoarea

Teoremă. *Un spațiu Riemann V_2 raportat la un sistem de coordonate izoterme este de prima speță, admițînd două familii de drepte caracteristice imaginare.*

Presupunem că și a treia familie de curbe caracteristice este constituită din caracteristice drepte. Vom studia două cazuri

1) cazul în care dreptele celei de-a treia familii de curbe caracteristice sînt paralele, adică ecuația (2) admite soluția:

$$y = ax + \lambda \tag{6}$$

unde a este o constantă reală, iar λ un parametru real.

În acest caz, din (5) rezultă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - a\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{6'}$$

Soluția generală a ecuației (6') este

$$\varphi(x, y) = F(x + ay)$$

unde F este o funcție arbitrară de clasă C^1.

Avem deci următoarea

Teoremă. *Dacă un spaţiu riemannian V_2 raportat la un sistem de coordonate izoterme admite caracteristice drepte reale paralele atunci forma canonică a metricii se poate scrie:*

$$ds^2 = e^{2F(x+ay)}(dx^2 + dy^2) \tag{7}$$

unde F este o funcţie arbitrară de clasă C^1, iar a este o constantă reală.

Evident, condiţia (7) este c necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu riemannian V_2 să admită caracteristice drepte reale paralele.

2) Cazul în care cea de-a treia familie de curbe caracteristice formează un fascicol de drepte caracteristice; în acest caz, ecuaţia (2) admite soluţia: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$; unde λ este un parametru real. Putem considera $x_0 = y_0 = 0$, adică fascicolul de drepte să fie cu centrul în origine, ceea ce este totdeauna posibil printr-o translaţie.

Drivînd ultima relaţie avem: $y = \lambda$, deci ecuaţia fascicolului de drepte se scrie:

$$y = y'x \tag{8}$$

Atunci din (5) rezultă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{8'}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (8') este $\varphi(x, y) = \Phi(x^2 + y^2)$ unde Φ este o funcţie arbitrară de clasă C^1. Avem deci următoarea

Teoremă. *Dacă un spaţiu riemannian V_2 raportat la un sistem de coordonate izoterme admite caracteristice drepte reale ce formează un fascicol, atunci forma canonică a metricii se poate scrie:*

$$dx^2 = e^{2\Phi(x^2+y^2)}(dx^2 + dy^2) \tag{9}$$

unde Φ este o funcţie arbitrară de clasă C^1.

Evident condiţia (9) este necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu Riemann V_2 să admită caracteristice drepte reale ce formează un fascicol

*

Dacă considerăm transformarea liniară:

$$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = \beta x + \gamma y \end{cases}$$

unde β şi γ satisfac condiţiilor

$$\beta\gamma = -a$$
$$\beta^2 - \gamma^2 = a^2 - 1$$

atunci metrica (7) se poate aduce la forma canonică

$$ds^2 = e^{2f(x)}(dx^2 + dy^2) \tag{7'}$$

unde f este o funcţie de clasă C^1

Rezultă deci următoarea teoremă

Teoremă: *Condiția necesară și suficientă ca un spațiu riemannian V_2, raportat la un sistem de coordonate izoterme să admită caracteristice drepte reale paralele este ca metrica lui să poată fi adusă printr-o transformare liniară la forma canonică* (7').

Forma canonică (7') este un caz particular al metricii lui Schapiro ([4], II, p. 39) pentru spațiile V_n de $n-2$ ori proiective despre care se știe că admit forma canonică a metricii:

$$ds^2 = e^{2f(x^1)}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \tag{10}$$

De asemenea, se știe că dacă

$$f(x^1) = a_1 x^1,$$

unde a_1 este o constantă nenulă (dacă a_1 ar fi egal cu zero, spațiul ar fi euclidian), atunci metrica

$$ds^2 = e^{2a_1x^1}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \tag{11}$$

este metrica *Vagner* pentru spațiile cu conexiune constantă [7] (v. și [6]).

Avem deci următoarea

Teoremă. *Orice spațiu riemannian V_2, raportat la un sistem de coordonate izoterme și care este spațiu Vagner, are caracteristice reale formate din drepte paralele.*

Dacă în formula (7') luăm

$$f(x) = \frac{1}{2} ln \frac{1}{-Kx^2}$$

unde K este o constantă negativă, atunci se obține *forma canonică a lui Beltrami:*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{-Kx^2}$$

Avem deci următoarea

Teoremă: *Orice spațiu riemanian V_2 cu curbură constantă negativă, raportat la un sistem de coordonate în care metrica are forma lui Beltrami, are caracteristice reale formate din drepte paralele.*

Se observă de asemenea că, dacă în metrica (9) luăm

$$\Phi(x^2 + y^2) = ln \frac{1}{1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2)}$$

unde K este o constantă reală, atunci se obține metrica unui spațiu riemannian V_2 cu curbură constantă sub *forma lui Riemann*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2)\right]^2} \tag{9'}$$

Rezultă următoarea

Teoremă: *Orice spaţiu riemanian V_2 cu curbură constantă, raportat la un sistem de coordonate în care metrica are forma lui Riemann, are caracteristicele reale formate dintr-un fascicol de drepte.*

Spaţiile riemaniene cu metrica (11) au fost studiate de prof. G. Vrănceanu [6], care a dat anumite proprietăţi globale ale acestor spaţii şi a arătat că aceste spaţii au proprietăţi analoge acelora ale spaţiilor cu curbură constantă negativă; deci, se pot construi cu ele anumite geometri neeuclidiene hiperbolice generalizate. Tot în [6] se studiază şi problema scufundării spaţiilor de metrică (11) într-un spaţiu euclidian.

Menţionăm, de asemenea, că problema scufundării unui spaţiu riemannian V_n într-un spaţiu euclidian $E_N (N \geqslant n)$ a fost considerată de prof. N.N. N. N. Mihăileanu [8], care a dat o metodă elegantă de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. **Ion D. Teodorescu**: *Asupra spaţiilor A_2 cu conexiune afină.* St. cerc. mat., 20, 5, 751–761 (1968).
2. **Ion D. Teodorescu**: *Curbele caracteristice ale unei suprafeţe.* St. cerc. mat., tom 22 ,nr. 10 p. 1513–1520, Bucureşti, 1970.
3. **Ion D. Teodorescu**: *Asupra curbelor caracteristice ale unei suprafeţe.* Lucrări ştiinţifice. Inst. Pedagogic Galaţi, vol. V, 1971.
4. **G. Vrănceanu**: *Lecons de Geometrie differentielle,* vol. I–II, Ed. de l'Acad. de la R.P.R., Bucarest 1957, vol. III, Ed. de l'Acad. de la R.P.R., Bucarest et Gauthier-Villars Paris 1764.
5. **O. Boruvka**: *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs.* Publ. Fac. Sc, Brno, nr. 85, 1926.

   G. Vrănceanu:

   Transformazioni punctuali tra spazi affini o proiectivi e spazi a coneessione affine euclideo, Boll. Un. Mat. It., ser. 3, vol. 12, nr. 1, 1957, p. 145–153.
6. **G. Vrănceanu**: *Proprietăţi globale ale spaţiilor lui Riemann cu conexiune afină constantă.* St. cerc. mat., Acad. R.P.R., anul XIV, nr. 1, 1963.
7. **V. Vagner**: *Spaţii ale lui Riemann cu simbolurile lui Christoffel constante.* Bul. Univ. Saratov (1938).
8. **N. N. Mihăileanu**: *Despre scufundarea unui V_n în E_N.* Acad. R.P.R. Baza Timişoara, Lucrările Consfătuirii de Geometrie Diferenţială din 9–12 iunie 1955.

SUR LES ESPACES RIEMANIÉNS — V_2 AVEC DES CARACTÉRISSIQUES DROITES

Resume

Dans cette note on détermine les expaces riemanniennes V_2 qui admettant des caractéristiques droites parallèles ou droites qui forment un faisceau, quand l'espace est rapporté à un système de coordonnées isothermes. Quel-ques propriétés générales de ces espaces ont été etabli par I. D. Teodorescu [1], [2], [3].

On donne la forme canonique de la métrique des espaces riemanniennes V_2 raportés a un système de coordonnées isothermes, qui admettent caractéristiques droites parallèles ou qui forment un faisceau.

On montre que dans le cas où les droites caractéristiques réelles sont parallèles, ces espaces admettent le métrique Schapiro pour les espaces Vn, n-2 fois projectives.

En particulier on obtient les espaces Vagner et les espaces de courbure constante.

Primită la 26.IV.1973

Universitatea București
Facultatea de Matematică-Mecanică

LA SOLUTION FONDAMENTALE D'UNE EQUATION SINGULIERE

V. OLARIU

Dans ce qui suit, on obtient la solution fondamentale (élémentaire) au sens de la théorie des distributions, pour une équation classique, l'équation dite „L'équ ation de Euler-Poisson-Darboux":

$$L_a u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0; \tag{1}$$

ici, a est un nombre complexe et Δ_n est l'opérateur de Laplace dans $R^n : \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $n > 1$. Evidement, la variété $t = 0$ est singulière dans l'espace $R^{n+1} = (t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n > 1$, pour l'équation (1). Par conséquent, par définition, la solution fondamentale (élémentaire) (au sens de la théorie des distributions) est la distribution $E_t(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ (t étant un paramètre réel non-négatif) laquelle vérifie les relations

$$L_a E_t(x) = 0, \text{ pour } t > 0, \; E_t(x) = \delta(x), \quad \frac{\partial E_t(x)}{\partial t} = 0, \text{ pour } t = 0. \tag{2}$$

1. LE CAS DE L'EQUATION DE LA MOYENNE SPHERIQUE

On sait que l'équation aux dérivées partielles de la moyenne sphèrique s'obtient de l'équation (1) pour $2a = n - 2$ (voir [1], [2]), pour $n = 2, 3, \ldots$ La solution fondamentale correspondante est

$$E_t(x) = \delta_t(x) \tag{3}$$

où

$$\delta_t(x) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \delta(t - |x|) \tag{4}$$

où $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ (l'aire de la sphère unité de R^n), $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ et $\delta(y)$ est la — distribution de Dirac dans R^1 ($\langle\delta(y), \varphi(y)\rangle = \varphi(0)$); la distribtiuon $\delta_t(x)$ est définie, pour chaque fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ par l'égalité

$$(4') \qquad \langle\delta_t(x), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int_{|x|=t} \varphi(x)\, d\sigma = M_t^0[\varphi]$$

$M_t^x[\cdot]$ étant la moyenne sphèrique sur la sphère de rayon t et de centre $x \in R^n$ et $d\sigma$ est l'élément d'aire sur la sphère.
Pour démontrer l'égalité (3) il suffit de démontrer la relation

$$(5) \qquad \hat{\delta}_t(x) = P_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|),$$

le signe ^ indique la transformée de Fourier de la distribution sur laquelle il est posé ($\hat{f} = F[f]$), $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ et $P_a(z)$ est la „fonction de Bessel normée" définie par la relation

$$(6) \quad P_a(z) = 2^a z^{-a}\Gamma(a+1) J_a(z),\ J_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+a+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+a}$$

Il resulte que la fonction $P_a(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$(6') \qquad zw'' + (2a+1)\, w' + zw = 0$$

et les conditions $P_a(0) = 1$, $P_a'(0) = 0$.
Conformément à la définition de la transformée de Fourier des distributions de $\mathcal{D}'(R^n)$ on doit avoir l'égalité

$$\langle\hat{\delta}_t, \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n \langle\delta_t, \varphi\rangle$$

et par suite, à cause de (4')

$$\langle\hat{\delta}, \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n \frac{1}{\omega_n} \int_{|x|=1} \varphi(x)\, d\omega_n,\ d\omega_n = d\sigma|_{t=1};$$

mais, parce que on a

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle} = d\xi;$$

$\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, on obtient l'égalité

$$\langle\hat{\delta}_t, \hat{\varphi}\rangle = \frac{1}{\omega_n} \int_{R^n} \left(\int_{|x|=1} e^{-i\langle x, \xi\rangle} d\omega_n\right) \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

et îl reste de trouver la moyenne sphèrique pour la fonction $\exp(-i\langle x, \xi\rangle)$; mais, parce que on a $\Delta_n^x(e^{-i\langle x, \xi\rangle}) = -|\xi|^2 e^{-i\langle x, \xi\rangle}$ il résulte que cette fonction vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta_n^x u + |\xi|^2 u = 0$, et on sait (voir [1], [2]) que pour ses solutions il est valable l'identité $M_t^x[u] = P_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|)u(x)$; dans le cas qui nous intéresse on a $x = 0$ et il résulte finalement l'égalit suivante

$$\langle \hat{\delta}_t, \hat{\varphi}\rangle = \langle P_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|), \hat{\varphi}(\xi)\rangle,$$

et donc l'égalité (5) est démontrée; parce que l'équation (6') est vérifiée il résulte que pour $t > 0$ est vérifiée l'équation suivante $\left(\text{obtenue pour } a = \frac{n}{2} - 1\right)$

$$\hat{\delta}_t''(t|\xi|) + \frac{n-1}{t}\hat{\delta}_t'(t|\xi|) + |\xi|^2\hat{\delta}_t(t|\xi|) = 0 \qquad \hat{\delta}_t' = \frac{d\hat{\delta}}{dt}$$

(la transformée de Fourier étant considérée par rapport à x et non à t); en appliquant la transformée inverse on obtient le fait que la distribution $\delta_t(x)$ vérifie pour $t > 0$ l'équation Euler-Poisson-Darboux de la moyenne sphèrique. De plus, les conditions $\hat{\delta}_t|_{t=0} = 1$ et $\hat{\delta}_t'|_{t=0} = 0$ donnent $\delta_t|_{t=0} = \delta(x)$ et $\delta_t'|_{t=0} = 0$ et en effet, la distribution (4) est la solution fondamentale (au sens de la définition donnée au commencement). Un calcul simple, nous montre que la convolution $\delta_t(x)*f(x)$ est la solution de l'équation $L_{\frac{n}{2}-1}\, u = 0$, laquelle vérifie les conditions de Cauchy $u|_{t=0} = f$, $\left.\frac{du}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, pour chaque distribution f au support compact dans R_n. Par suite, on peut dire que la convolution $\delta_t(x)*f(x)$ est la moyenne sphèrique pour la distribution f.

2. LE CAS REa $\in \left(-1, \frac{n}{2} - 1\right]$

Pour trouver la solution fondamentale pour a vérifiant les conditions $-1 < Re\, a \leqslant \frac{n}{2} - 1$, on transforme à l'aide de la transformée de Fourier les relations (2). Il résulte que la transformée de Fourier $\hat{E}_t$ vérifie les relations:

$$\frac{\partial^2\hat{E}_t}{\partial t^2} + \frac{2a+1}{t}\frac{\partial\hat{E}_t}{\partial t} + |\xi|^2\hat{E}_t = 0,\ \hat{E}_t(\xi)|_{t=0} = 1,\ \left.\frac{\partial\hat{E}_t}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

La seule solution correspondante aux conditions (2′) sera

$$\hat{E}_t(\xi) = P_a(t|\xi|)$$

et, par suite, on a

$$E_t(x) = F^{-1}[P_a(t|\xi|)] = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} P_a(t|\xi|)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} d\xi \tag{7}$$

Pour trouver l'expression explicite de cette solution fondamentale, on peut utiliser une représentation intégrale connue pour la fonction de Bessel $J_a(z)$ (voir [4], vol. 2, § 7.3, la formule 6):

$$J_a(bz) = \frac{z^a}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[\frac{b}{2}\left(y - \frac{z^2}{y}\right)\right] y^{-a-1}\, dy,\ c > 0,\ b > 0,\ Re\ a > -1. \tag{8}$$

Si on prend $b = t$, $z = |\xi|$, en utilisant la définition de $P_a(z)$ s'obtient la représentation intégrale suivante:

$$P_a(t|\xi|) = \frac{2^a \Gamma(a+1)}{2\pi i \cdot t^a} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[\frac{t}{2}\left(y - \frac{|\xi|^2}{y}\right)\right] y^{-a-1} dy$$

et on obtient ainsi l'expression suivante:

$$E_t(x) = 2^a (2\pi i)^{-1} \Gamma(a+1)(2\pi)^{-n} t^{-a} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(\frac{ty}{2}\right) y^{-a-1} \times$$

$$\times \left[\int_{R^n} \exp\left(-\frac{t}{2y}|\xi|^2 - i\langle x, \xi\rangle\right) d\xi\right] dy$$

L'intégrale intérieure est élémentaire et elle est calculable par l'appliquation du théorème de Cauchy; on trouve

$$E_t(x) = 2^a (2\pi i)^{-1} \Gamma(a+1)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{-a-\frac{n}{2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[-\frac{y}{2t}\,(t^2 - |x|^2)\right] y^{\frac{n}{2}-a-1} dy$$

Enfin, en effectuant la transformation $\frac{y}{2t} \to y, t > 0$, on obtient la formule suivante:

$$E_t(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} (2\pi i)^{-1} \Gamma(a+1)\, t^{-2a} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[y(t^2 - |x|^2)\right] y^{\frac{n}{2}-a-1} dy$$

Maintenant, si on utilise l'expression de la distribuition de Dirac à l'aide de la transformation de Laplace,

$$\delta(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \exp(xy)\, dy, \qquad c_1 > 0,$$

il résulte, en effectuant $\left(\frac{n}{2} - a - 1\right)$ dérivations sous le signe d'intégration:

$$\delta\left(\frac{n}{2} - a - 1\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \exp(xy)\, y^{\frac{n}{2} - a - 1}\, dy.$$

Une simple comparaison entre cette expression et la dernière relation pour la solution fondamentale, conduit directement à la formule cherchée:

$$E_t(x) = \pi^{-\frac{n}{2}}\, \Gamma(a+1)\, t^{-2a} \delta^{\left(\frac{n}{2} - a - 1\right)}(t^2 - |x|^2) \tag{9}$$

Mais parce que a est un nombre complexe, il résulte que l'ordre de dérivation $\frac{n}{2} - a - 1$ est aussi un nombre complexe; ainsi, la solution fondamentale cherchée pour l'équation $L_a u = 0$ s'exprime par une dérivée d'un ordre complexe d'une distribuion singulière. Pour avoir effectivement une dérivée de la distribution $\delta(t^2 - |x|^2)$ on doit supposer qu'on a $Re\left(\frac{n}{2} - a - 1\right) \geqslant 0$, donc $Re\, a \leqslant \frac{n}{2} - 1$; par suite, pour a on doit supposer $-1 < Re\, a \leqslant \frac{n}{2} - 1$.

Il résulte que la solution du problème de Cauchy (pour $L_a u = 0$)

$$u(t, x)|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{10}$$

s'exprime sous la forme suivante:

$$u(t, x) = E_t(x) * f(x), \tag{11}$$

pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(R^n)$, pour laquelle la convolution (par rapport aux variables x) existe.

Il est possible qu'on a des dérivations ordinaires si on a $a = \frac{n}{2} - k - 1$ avec k nombre entier, $0 \leqslant k < \frac{n}{2}$.

3. QUELQUES CAS PARTICULIERS

1. Si on suppose $a = \frac{n}{2} - 1$, l'équation $L_a u = 0$ se transforme dans l'équation d'Euler-Poisson-Darboux de la moyenne sphèrique et la solution élémentaire (9) devient

$$E_t(x) = \pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t^{2-n}\, \delta(t^2 - |x|^2) = \frac{2}{\omega_n t^{n-2}}\, \delta(t^2 - |x|^2)$$

et cette solution fondamentale coincide avec la solution fondamentale trouvée plus haut (point 1) parce que on sait (voir [3]) qu'on a l'égalité

$$\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{1}{2t}\,\delta(t - |x|)$$

2. Soit maintenant $a = -\frac{1}{2}$; l'équation $L_{-\frac{1}{2}}u = 0$ est l'équation des ondes de R^n et donc la solution fondamentale corréspondante est

$$E_t(x) = \frac{t}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,\delta^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(t^2 - |x|^2)$$

Parce que n est la dimension de l'espace R^n on doit supposer n pair ou n impair. Si on a $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ il résulte $\frac{n-1}{2} = m$ et dans ce cas on a

$$E_t(x) = \frac{t}{\pi^m}\,\delta^{(m)}(t^2 - |x|^2)$$

Cette distribution s'écrit sous une autre forme; en effet, on a:

$$\delta^{(m)}(t^2 - |x|^2) = \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m \delta(t^2 - |x|^2) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m \left[\frac{\delta(t - |x|)}{2t}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m \left[\frac{\delta(t - |x|)}{t}\right].$$

Par suite, une autre expresion pour la solution fondamentale pour le problème de Cauchy $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ pour l'équation des ondes de R^n est (pour $n = 2m + 1$)

$$E_t(x) = \frac{t}{2\pi^m}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m \left[\frac{\delta(t - |x|)}{t}\right]$$

La solution cherchée s'écrit donc sous la forme

$$u(t, x) = E_t(x) * f(x) = \frac{t\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m (t^{n-2} M_t[f]),$$

parce que $\delta(t - |x|) * f(x) = \omega_n t^{n-1} M_t[f]$.

Si $n = 2m$, la solution fondamentale (9) donne

$$E_t(x) = \frac{t}{\pi^m \sqrt{\pi}} \delta^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}(t^2 - |x|^2),$$

et par suite, parce que $\delta^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}(z) = \delta^{(m)}[\delta^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(z)]$ et parce que la dérivée d'ordre $\left(-\frac{1}{2}\right)$ s'exprime à l'aide d'une itégrale la, solution cherchée est

$$u(t, x) = \frac{2t}{\Gamma(m)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m \int_0^t \frac{r^{n-1} M_r[r]}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

3. Si on considère maintenant la cas général donné par la formule (9), on note $\frac{n}{2} - a - 1 = m - b$ avec $m = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$ et $Re(b)$ étant compris entre zéro et 1; en ce cas, la solution de l'équation (1) laquelle vérifie les conditions (10) a la forme suivante:

$$u(t, x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma(a + 1)\ \delta^{(m-b)}(t^2 - x^2) * f(x)$$

et en utilisant le procédé de 2, on obtient finalement:

$$u(t, x) = 2\pi^{-\frac{n}{2}}\ \Gamma(a + 1) \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^k \int_0^t \frac{r^{n-1} M_r[t]}{(t^2 - r^2)^b} dr$$

BIBLIOGRAFIE

1. **R. Courant** — *Partial Differential Equations*, New York — London, 1962
2. **N. Teodorescu — V. Olariu** — *Ecuaţiile fizicii matematice*, E. D. P. 1970
3. **I. M. Ghelfand — G. E. Silov** — *Les fonctions generalisees*, Moscou, 1958
4. **H. Bateman — Higher — Transcendental Functions**, vol. 2, 1953.

Recu le 26.IV.1973

Universite de Bucharest,
Faculte de Mathematique-Mecanique

FORMULAE FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

B. L. SHARMA & R. F. A. ABIODUN

1. INTRODUCTION

Carlitz [2, 3], Jain [6], Pandey & Saran [9] have given various generalisations of Saalschutz's theorem [9, p. 49] in two variables. The object of this paper is to obtain some formulae connecting gypergeometric function of two variables with hypergeometric function of one variable. The results are general in character and include as a particular case the generalisation of the Saalschutz's theorem [9, p. 49] given by Ialla and Saxena [7, p. 234(10)]

The following notation due to Chaundy [4] will be used to represent the hypergeometric function of higher order and of two variables.

$$F\begin{bmatrix}(a_p);\ (b_q);\ (c_r);\ x,\ y\\ (d_s);\ (e_h);\ (f_l);\end{bmatrix}=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{[(a_p)_{m+n}[(b_q)]_m\,[(c_r)]_n\,x^m y^n}{[(d_s)]_{m+n}\,[(e_h)]_m\,[(f_l)]_n\,m!\,n!} \tag{1}$$

where (a_p) and $[(a_p)]_{m+n}$ will mean $a_1, \ldots, a_p$ and $(a_1)_{m+n}, \ldots, (a_p)_{m+n}$ respectively.

In the investigation we shall make use of the formula [1, p. 14(1)].

$${}_3F_2\begin{bmatrix}a,\ b,\ c;\ 1\\ e,\ f\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(f)\,\Gamma(s)}{\Gamma(a)\,\Gamma(s+b)\,\Gamma(s+c)}\,{}_3F_2\begin{bmatrix}e-a,\ f-a,\ s;\ 1\\ s+b,\ s+c\end{bmatrix}, \tag{2}$$

where $s = e + f - a - b - c$.

2. THE FIRST FORMULA TO BE PROCED IS

$$F\begin{bmatrix}\alpha;\ \lambda,\ \mu;\ \beta,\ \gamma;\ 1,\ 1\\ \delta;\ 1-\rho+\alpha;\ \rho;\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\gamma)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\Gamma(1-\rho+\alpha)\ \Gamma(1-\rho+\alpha-\lambda-\mu)}{\Gamma(1-\rho+\alpha-\lambda)\ \Gamma(1-\rho+\alpha-\mu)}\,{}_4F_3[\delta-\alpha,\quad \delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma,\quad \rho+$$

$$+\lambda-\alpha,\ \rho+\mu-\alpha;\ \delta+\rho-\alpha-\beta,\ \delta+\rho-\alpha-\gamma\ \ \rho+\lambda+\mu-\alpha;\ 1],\ldots \tag{3}$$

where $\delta,\ \rho \neq 0, 1, -2, \ldots,\ R_e(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma) > 0,\ R_e(1-\rho+\alpha-$ $-\lambda-\mu) > 0$.

PROOF: We start with the left hand side of (3).

$$F\begin{bmatrix}\alpha;\ \lambda,\ \mu;\ \beta,\ \gamma;\ 1,\ 1\\ \delta;\ 1-\rho+\alpha;\ \rho\end{bmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\lambda)_m(\mu)_m(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_{m+n}(1-\rho+\alpha)_m(\rho)_n m!\,n!}\ by(1).$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\lambda)_m(\mu)_m}{(\delta)_m\,(1-\rho+\alpha)_m\,m!}\ {}_3F_2\begin{bmatrix}\alpha+m,\ \beta,\ \gamma;\ 1\\ \delta+m,\ \rho\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m(\mu)_m}{(1-\rho+\alpha)_m\,m!}$$

$${}_3F_2\begin{bmatrix}\delta-\alpha,\ \rho-\alpha-m,\ \delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma;\ 1\\ \delta+\rho-\alpha-\gamma,\ \delta+\rho-\alpha-\beta\end{bmatrix}by(2)$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho)\Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta+\rho-\alpha-\gamma)\Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\delta-\alpha)_n(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma)_n}{(\delta+\rho-\alpha-\gamma)_n\,n!}$$

$$\frac{(\rho-\alpha)_n}{(\delta+\rho-\alpha-\beta)_n}\ {}_2F_1\begin{bmatrix}\lambda,\ \mu;\ 1\\ 1-\rho-\alpha-n\end{bmatrix},\ \text{by using Gauss's theorem [1, p. 2(1.3)]}$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma)\ \Gamma(1-\rho+\alpha)\ \Gamma(1-\rho+\alpha-\lambda-\mu)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\gamma)\ \Gamma(\delta+\rho-\alpha-\beta)\ \Gamma(1-\rho+\alpha-\lambda)\ \Gamma(1-\rho+\alpha-\mu)}$$

$$F_3[\delta-\alpha,\ \delta+\rho-\alpha-\beta-\gamma,\ \rho+\lambda-\alpha,\ \rho+\mu-\alpha;\ \delta+\rho-\alpha-\beta,$$
$$\delta+\rho-\alpha-\gamma,\ \ \rho+\lambda+\mu-\alpha;\ 1].$$

This completes the proof of (3). In particular, if we put $\alpha=\rho+\lambda$ in (3), it yields the following interesting formula.

$$F\begin{bmatrix}\rho+\lambda;\ \lambda,\ \mu;\ \beta,\ \gamma;\ 1,\ 1\\ \delta;\ 1+\lambda;\ \rho\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho)\ \Gamma(\delta-\lambda-\beta-\gamma)\ \Gamma(1+\lambda)\ \Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\rho+\lambda)\ \Gamma(\delta-\lambda-\beta)\ \Gamma(\delta-\lambda-\gamma)\ \Gamma(1+\lambda-\mu)}\ldots\ (4)$$

Taking $\gamma=0$ in (4), we have

$${}_3F_2\begin{bmatrix}\rho,\ \lambda,\ \mu;\ 1\\ \delta,\ 1+\lambda;\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\rho-\lambda)\ \Gamma(1+\lambda)\ \Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\rho)\ \Gamma(\delta-\lambda)\ \Gamma(1+\lambda-\mu)}\ldots\ldots\qquad(5)$$

If we take $\rho=\delta+m$, $m=0,1,2,\ldots$, in (5), it reduces to a known result due to Kalla and Saxena [7, p. 234(10)].

In case we take $\lambda=0$, in (4), it reduces to Gauss's theorem [1, p. 2(103)].

3. The second formula to be proved is

$$F\begin{bmatrix}\alpha,\ \rho;\ \lambda;\ \mu;\ 1,\ 1\\ \gamma,\ \delta;\ -\ ;\ -\ ;\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\gamma)\ \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\mu)\ \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\rho-\lambda-\mu)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\rho)\ \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\rho-\mu)\ \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\lambda-\mu)}$$

$${}_3F_2[\delta-\alpha,\ \ \gamma-\alpha,\ \ \delta+\gamma-\alpha-\rho-\lambda-\mu;\ \ \delta+\gamma-\alpha-\rho,$$
$$\delta+\gamma-\alpha-\lambda-\mu;\ 1],\ \ldots\ldots\qquad(6)$$

where $\delta,\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$, $Re(\delta+\gamma-\alpha-\rho-\lambda-\mu)>0$ $Re(\delta+\gamma-\alpha-\mu)>0$.

(6) can be proved in the same way as (3).
If we put $\rho = \delta$ in (6), it reduces to a known result [5, p. 239(10)].
If we take $\lambda = \gamma - \mu$ in (6), it reduces to the following interesting formula.

$$F\begin{bmatrix}\alpha, \rho; \gamma - \mu; \mu; 1, 1 \\ \gamma, \delta; - ; - ;\end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\delta)\ \Gamma(\delta + \gamma - \alpha - \mu)\ \Gamma(\delta - \alpha - \rho)}{\Gamma(\delta + \gamma - \alpha - \rho - \mu)\ \Gamma(\delta - \alpha)\ \Gamma(\delta - \rho)} \ldots \ldots \quad (7)$$

(4) and (7) are believed to be new results.

REFERENCES

[1] **Bailey, W. N.** *Generalised hypergeometric series*, Cambridge, 1935.

[2] **Carlitz, L.** *„A Saalschutzian theorem for double series"*. Jour. of Lond. Math. Soc. Vol. 38. pp. 415–418. (1963).

[3] **Carlitz, L.** *„Summation of a double hypergeometric series"*. Matematische (Catania), Vol. 22. pp. 138–142. (1967).

[4] **Chaundy, T. W.** *„Expansions of hypergeometric functions"*. Quart. J. Math. Oxford Ser. 13. (1942).

[5] **Erdelyi, A.** *Higher transcendental functions*. Vol. I. (1953). New-York.

[7] **Kalla, S. L. Saxena, R. K.** *„Integral operators involving hypergeometric functions"* Math Zeitschr. 108, pp. 231–234 (1969).

[8] **Pandey, R. C. Saran, S.** *„On the hypergeometric functions of higher order in two variables"*. Proc. Raj. Acad. of Sciences. Vol. X, pp. 3–13. 1963.

[9] **Slater, L. J.** *Generalised hypergeometric functions*. Cambridge University Press. (1966).

Received on 14 II 1973

Department of Mathematics,
University of Ife,
Ife-Ife.
NIGERIA.

CORESPONDENTE ÎNTRE SPAȚII AFINE A_3 CU CONEXIUNE POLINOMIALĂ*

ION D. TEODORESCU – NICOLAE NEDIȚĂ – LIVIU NICOLESCU

Cunoașterea spațiilor local euclidiene $A_n(x^1, ..., x^n)$ cu conexiune polinomială și avînd conexiunea contractată nulă permite cercetarea transformărilor cremoniene întregi [1] (v. și [2], p. 386).

Dîndu-se coeficienții Γ^i_{jk} ai conexiunii afine a unui astfel de spațiu, problema se reduce la determinarea transformării punctuale

$$u^i = u^i(x^1, ..., x^n) \qquad (i, j, ... = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

ce aplică spațiul $A_n(x^1, ..., x^n)$ *în* sau *pe* spațiul afin $E_n(u^1, ..., u^n)$. Dacă u^i sînt polinoame și dacă transformarea inversă este de asemenea dată prin polinoame, atunci transformarea (1) este cremoniană întreagă.

Pentru un spațiu A_2, rezultate se datoresc prof. *G. Vrănceanu* [1]; problema este rezolvată [3], [4] (v. și [5]).

În această notă se determină spațiile local euclidiene $A_3(x,y,z)$ cu conexiune polinominală și avînd conexiunea contractată nulă, în cazuri cînd una din familiile de curbe coordonate este constituită din curbe autoparalele. Apoi, se cercetează care din aceste spații corespund unor transformări cremoniene întregi.

Cazurile cînd spațiul A_3 este raportat la un sistem de curbe coordonate constituite din curbe autoparalele au fost studiate în [6].

*

Se știe ([2], p. 354] că determinarea spațiilor local euclidiene $A_n(x^1, ..., x^n)$ cu conexiune afină Γ^i_{jk} se reduce la integrarea sistemului

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0, \quad \Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} = 0 \tag{2}$$

În ce privește transformarea asociată (1), ea este dată de n soluții independente, cu determinant funcțional nenul, ale sistemului

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0.$$

---

*) Comunicare prezentată la sesiunea jubiliară dedicată celei de a X-a aniversări a Institutului Pedagogic din Bacău (nov. 1971).

Se zice că spațiul A_n este cu conexiune polinomială dacă există un sistem de coordonate $x^1, \ldots, x^n$ în care componentele $\Gamma^i_{jk}(x, \ldots, x^n)$ ale conexiunii să fie polinoamele în variabilele $x^1, \ldots, x^n$.

*

Fie spațiul local euclidian $A_3(x, y, z)$ cu conexiune polinomială Γ^i_{jk} avînd conexiunea contractată $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ nulă.

Deci avem

$$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^2_{22} = -\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}, \quad \Gamma^3_{33} = -\Gamma^1_{13} - \Gamma^2_{23}. \tag{2'}$$

Să presupunem că spațiul A_3 este raportat la un sistem de curbe coordonate cu una din familiile de curbe coordonate constituită din curbe autoparalele, de exemplu curbele $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. sînt curbe autoparalele. În acest caz, trebuie să avem

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = 0, \tag{4}$$

condiții ce sînt conservate de transformarea fundamentală

$$x' = x, \qquad y' = z, \qquad z' = y. \tag{4'}$$

Pentru a rămîne numai în acest caz, deci pentru ca spațiul A_3 să nu fie raportat la un sistem de coordonate cu una sau cu două din familii de curbe coordonate constituite din curbe autoparalele, trebuie ca cel puțin una din componentele Γ^1_{22}, Γ^3_{22} și una din componentele Γ^1_{33}, Γ^2_{33} să fie diferită de zero. Rezultă că, abstracție făcînd de o transformare de forma (4'), sînt de considerat cazurile

$$\Gamma^1_{22} \neq 0, \quad \Gamma^3_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{33} \neq 0, \quad \Gamma^2_{33} = 0; \tag{5}$$

$$\Gamma^1_{22} \neq 0, \quad \Gamma^3_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{33} = 0, \quad \Gamma^2_{33} \neq 0; \tag{5'}$$

$$\Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^3_{22} \neq 0, \quad \Gamma^1_{33} = 0, \quad \Gamma^2_{33} \neq 0; \tag{5''}$$

sau

$$\Gamma^1_{22} \neq 0, \quad \Gamma^3_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{33} \neq 0, \quad \Gamma^2_{33} \neq 0; \tag{6}$$

$$\Gamma^1_{22} \neq 0, \quad \Gamma^3_{22} \neq 0, \quad \Gamma^1_{33} = 0, \quad \Gamma^2_{33} \neq 0; \tag{6'}$$

sau

$$\Gamma^1_{22} \neq 0, \quad \Gamma^3_{22} \neq 0, \quad \Gamma^1_{33} \neq 0, \quad \Gamma^2_{33} \neq 0. \tag{7}$$

*

Vom considera întîi cazurile care se pot prezenta în aceste condiții, celelalte componente ale conexiunii find nule.

În cazul (4) + (5), sistemul (2) + (2') se reduce la

$$\Gamma^1_{212} = -\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{223} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} = 0, \quad \Gamma^1_{313} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^1_{323} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial y} = 0$$

Obținem astfel *un spațiu A_3 ale cărui singure componente nenule ale conexiunii sînt*

$$\Gamma^1_{22} = a(y), \qquad \Gamma^1_{33} = b(z), \tag{8}$$

cu $a(y)$ și $b(z)$ polinoame. În acest caz, sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a(y)\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + b(z)\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

avînd integrala generală

$$V = k_1\left[x - \int\left(\int a(y)\,dy\right)dy - \int\left(\int b(z)\,dz\right)dz\right] + k_2 y + k_3 z + k_4.$$

Deci, notînd

$$a = -P'', \qquad b = -R'' \tag{8'}$$

transformarea punctuală asociată poate fi luată sub forma

$$\begin{aligned} u &= x + P(y) + P(z), \\ v &= y, \\ w &= z, \end{aligned} \tag{8'}$$

care este o *transformare cremoniană întreagă.*

În cazurile (4) + (5′) și (4) + (5″), din sistemul (2) + (2′) găsim $\Gamma^1_{323} = \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33} = 0$, respectiv $\Gamma^2_{223} = -\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{22} = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Cu alte cuvinte, *nu există spații local euclidiene A_3 cu conexiune contractată nulă avînd conexiunea de forma* (4) + (5′), *resp.* (4) + (5″), *celelalte componente ale conexiunii fiind nule.*

Fie cazul (4) + (6). Atunci, sistemul (2) + (2′) devine

$$\Gamma^1_{313} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{323} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial y} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33} = 0, \quad \Gamma^1_{212} = -\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} = 0$$

$$\Gamma^1_{323} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} = 0, \quad \Gamma^2_{313} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^2_{323} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial y} = 0.$$

Deci, obținem *spațiul A_3 avînd componentele nenule ale conexiunii de forma*

$$\Gamma^1_{22} = a'(y), \quad \Gamma^1_{33} = a(y)\,c(z) + b(z), \quad \Gamma^2_{33} = c(z), \tag{9}$$

unde $a(y)$, $b(z)$, $c(z)$ sînt polinoame. Pentru acest spațiu, sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a'\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + (ac + b)\frac{\partial V}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Soluția generală a acestui sistem este

$$V = k_1\left[x - \int a dy \int\left(\int b dz\right) dz\right] + k_2\left[y - \int\left(\int c dz\right) dz\right] + k_3 z + k_4$$

Așadar, notînd

$$a = -P', \quad b = -R'', \quad c = -Q'', \tag{9'}$$

transformarea asociată poate fi dată de formulele

$$\begin{aligned} u &= x + P(y) + R(z), \\ v &= y + Q(z), \\ w &= z, \end{aligned} \tag{9''}$$

fiind o transformare *cremoniană întreagă*.

Nici în cazurile (4) + (6') și (4) + (7) — celelalte componente ale conexiunii fiind nule — nu există spații A_3. În adevăr, avem

$$\Gamma^1_{323} = \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33} = 0, \text{ respectiv } \Gamma^2_{223} = -\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{22} = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Deci rezultă *propoziția:*

Un spațiu local euclidian A_3 cu conexiune contractată nulă, raportat la un sistem de coordonate cu numai una din familiile de curbe coordonate constituită din curbe autoparalele, și pentru care avem una din condițiile (4) + (5) — (4) + (7) *iar celelalte componente ale conexiunii sînt nule, este cu conexiune polinomială de forma* (9).

Un astfel de spațiu corespunde transformării cremoniene întregi (9'').

*

Vom studia acum cazurile care se pot prezenta în condițiile (4) + (5) — — (4) + (7), cînd numai una din componentele

$$\Gamma^1_{12},\ \Gamma^2_{12},\ \Gamma^3_{12},\ \Gamma^1_{13},\ \Gamma^2_{13},\ \Gamma^3_{13},\ \Gamma^1_{23},\ \Gamma^2_{23},\ \Gamma^3_{23} \tag{10}$$

este diferită de zero, componentele Γ^1_{11}, Γ^2_{22}, Γ^3_{33} fiind date de formulele (2').

Să considerăm, deci, cazul (4) + (5); atunci, abstracție făcînd de transformarea (4'), avem 5 subcazuri:

$$\text{a) } \Gamma^1_{12} \neq 0; \ \text{b) } \Gamma^2_{12} \neq 0; \ \text{c) } \Gamma^3_{12} \neq 0; \ \text{d) } \Gamma^1_{23} \neq 0; \ \text{e) } \Gamma^2_{23} \neq 0 \tag{11}$$

În subcazul (11 a), sistemul (2) + (2') devine

$$\Gamma^1_{112} = -\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x} - 2(\Gamma^1_{12})^2 = 0, \quad \Gamma^1_{233} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} = 0,$$

$$\Gamma^1_{313} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{332} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial y} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{33} = 0, \quad \Gamma^2_{223} = -\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial z} = 0.$$

Acest sistem admite soluţia

$$\Gamma^1_{12} = \alpha(y),\ \Gamma^1_{22} = (\alpha' - 2\alpha^2)\, x + a(y),\ \Gamma^1_{33} = b(z)\, e^{\int a dy}$$

care nu poate fi polinomială decît dacă $\alpha = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Nici în subcazurile (11 b), (11 c), (11 e) nu există spaţii A_3, deoarece avem

$$\Gamma^2_{323} = \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33} = 0, \text{ resp. } \Gamma^1_{213} = -\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} = 0, \text{ resp. } \Gamma^2_{323} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial z} - 2(\Gamma^2_{23})^2 = 0$$

contrazicînd ipoteza sau neadmiţînd soluţie polinomială.

Fie subcazul (11 d), cînd sistemul (2) + (2′) se reduce la

$$\Gamma^1_{212} = -\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} = 0,\quad \Gamma^1_{223} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial y} = 0,\quad \Gamma^1_{312} = -\frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^1_{313} - \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x} = 0,\quad \Gamma^1_{323} = \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial y} = 0.$$

Aşadar, găsim

$$\Gamma^1_{22} = a(y, z),\quad \Gamma^1_{33} = b(y, z),\quad \Gamma^1_{23} = \alpha(y, z),$$

polinoamele $a(y, z)$, $b(y, z)$, $\alpha(z, y)$ satisfăcînd ecuaţiile

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial z},\quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Condiţiile de integrabilitate ale sistemului conduc la

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial y^2},$$

aceste condiţii sînt satisfăcute dacă

$$a = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},\quad b = -\frac{\partial^2 P}{\partial z^2},\quad \alpha = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \text{ cu } P = P(y, z).$$

Deci, obţinem *spaţiul A_3 avînd componentele conexiunii nule afară de*

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},\quad \Gamma^1_{33} = -\frac{\partial^2 P}{\partial z^2},\quad \Gamma^1_{23} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z},$$

unde $P = P(y, z)$ *este un polinom arbitrar.*

În ce priveşte ecuaţiile (3), ele se scriu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Din primele trei ecuații, obținem că integrala generală este de forma

$$V = k_1 x + \varphi(y, z);$$

funcția $\varphi(y, z)$, satisfăcînd condițiile

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k_1 \frac{\partial P}{\partial z^2} = 0,$$

are expresia

$$\varphi(y, z) = k_1 P(y, z) + k_2 y + k_3 z + k_4.$$

Așadar, integrala generală este

$$V = k_1 [x + P(y, z)] + k_2 y + k_3 z + k_4.$$

Rezultă că *transformarea punctulală asociată spațiului* (12) poate fi luată sub forma

$$(12') \qquad \begin{aligned} u &= x + P(y, z), \\ v &= y, \\ w &= z, \end{aligned}$$

care este *o transformare cremoniană întreagă.*

În cazul (4) + (5') avem 9 subcazuri de considerat. Abstracție făcînd de subcazul în care $\Gamma^1_{23} \neq 0$, celelalte subcazuri conduc la o condiție ce contrazice ipoteza. Dacă $\Gamma^1_{23} \neq 0$, sistemul (2) + (2') se scrie

$$\Gamma^1_{323} = \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial z} + \Gamma^1_{22} \Gamma^2_{33} = 0, \quad \Gamma^1_{213} = -\frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{212} = -\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^1_{223} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial y} = 0, \quad \Gamma^2_{313} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^2_{323} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial y} = 0.$$

Deci, rezultă

$$(13) \qquad \Gamma^1_{22} = a(y, z), \quad \Gamma^1_{23} = \alpha(y, z), \quad \Gamma^2_{23} = c(z),$$

polinoamele $a(y, z)$, $\alpha(y, z)$, $c(z)$ satisfăcînd ecuațiile

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} + ac = 0.$$

Din prima ecuație, găsim *)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = 0,$$

care este satisfăcută dacă

$$a = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \alpha = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}.$$

Atunci, a doua ecuație cere ca polinomul $P(y, z)$ să fie o soluțiea ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + c\frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{13''}$$

Așadar, obținem un *spațiu A_3 ale cărui componente nenule ale conexiunii sînt* (13), *polinomeulen $a(y, z)$, $\alpha(y, z)$ fiind de forma* (13′), *cu $P(y, z)$ o soluție a ecuației* (13″)

În ce pri.vește sistemul (3), rezultă

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \alpha\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c\frac{\partial V}{\partial y} = .$$

Din primele trei ecuații ale acestui sistem, găsim

$$V = k_1 x + \varphi(y, z).$$

* Din $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} + c\frac{\partial a}{\partial y} = 0$ obținem că polinomul $a(y,z)$ este o soluție a ecuației

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + c\frac{\partial a}{\partial y} = 0, \text{ încît} \tag{13a}$$

$$\alpha = \int \frac{\partial a}{\partial z}\, dy - \int\left(ac + \int \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\, dz\right) dz + \alpha_0. \tag{13b}$$

De exemplu, dacă $a(y,z)$ este un polinom de gradul doi, atunci

$$\Gamma^1_{22} = a(y,z) = -\frac{1}{2}\gamma_0 a_{10} z^2 + a_{10} y + a_{01} z + a_{00},$$

$$\Gamma^2_{33} = c(z) = \gamma_0, \tag{13 c}$$

$$\Gamma^1_{23} = \alpha(y,z) = \frac{1}{6}\gamma^2_0 a_{10} z^3 - \frac{1}{2}\gamma_0 a_{01} z^2 - \gamma_0 a_{10} yz + a_{01} y - \gamma_0 a_{00} z + \alpha_0.$$

Deci, funcția $\varphi(x, y)$ este determinată de condițiile

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + c \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Din primele două ecuații obținem

$$\varphi = k_1 P + k_2 y + \psi(z),$$

încît a treia ec uație se scrie

$$k_1 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + c \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \psi'' + k_2 c = 0.$$

Ținînd seama de (13''), rezultă că funcția $\psi(z)$ este o soluție a ecuației

$$\psi'' - k_2 Q'' = 0$$

luîndu-se

$$13''') \qquad c = -Q'' = -\frac{d^2 Q(z)}{dz^2}.$$

Deci, găsim

$$V = k_1[x + P(y, z)] + k_2[y + Q(z)] + k_3 z + k_4.$$

Așadar, *transformarea punctuală asociată spațiului* (13) — (13''') *poate fi uată sub forma*

$$(14) \qquad \begin{aligned} u &= x + P(y, z) \\ v &= y + Q(z) \\ w &= z \end{aligned} \qquad \text{cu} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - Q'' \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

adică polinomul $P(y,z)$ este o soluție a ecuației (13") — (13'''). Această *transformare* este *cremoniană întreagă*.

Fie acum cazul (4) + (5''); abstracție făcînd de transformarea (4'), avem de considerat cele 5 subcazuri (11). În aceste subcazuri nu există spații A_3, deoarece sau obținem relații ce contrazic ipoteza (primele subcazuri) sau obținem soluție nepolinomială (ultimul subcaz).

Dacă sîntem în cazul (4) + (6), avem 9 subcazuri. Pentru $\Gamma^1_{12} \neq 0$, resp. $\Gamma^2_{12} \neq 0$, sau $\Gamma^1_{13} \neq 0$, sau $\Gamma^2_{23} \neq 0$, sau $\Gamma^3_{23} = 0$, din sistemul (2) + (2') obținem resp. ecuația

$$\Gamma^2_{323} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial y} - \Gamma^1_{12}\Gamma^{2'}_{33} = 0; \quad \Gamma^2_{213} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{33} = 0;$$

$$\Gamma^1_{223} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} - \Gamma^1_{13}\Gamma^1_{22} = 0; \quad \Gamma^1_{223} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial z} + \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{22} = 0;$$

$$\Gamma^2_{323} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial y} - 2\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} = 0,$$

care nu admite soluție polinomială.

Pentru $\Gamma^3_{12} \neq 0$ resp. $\Gamma^2_{13} \neq 0$, sau $\Gamma^3_{13} \neq 0$, avem resp. condiția

$$\Gamma^1_{213} = -\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} = 0; \quad \Gamma^1_{123} = \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13} = 0; \quad \Gamma^3_{223} = -\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22} = 0.$$

ce contrazice ipoteza.

Așadar, să studiem subcazul $\Gamma^1_{23} \neq 0$, cînd sistemul (2) + (2′) se scrie

$$\Gamma^1_{313} = -\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{323} = \frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial z} - \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial y} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33} = 0,$$

$$\Gamma^1_{213} = -\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^1_{212} = -\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^1_{223} = \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial z} - \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial y} = 0, \quad \Gamma^2_{313} = -\frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^2_{323} = -\frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial y} = 0.$$

Deci, obținem

(15) $\Gamma^1_{22} = a(y, z), \quad \Gamma^1_{33} = b(y, z), \quad \Gamma^2_{33} = c(z), \quad \Gamma^1_{23} = \alpha(x, y),$

polinoamele $a(y, z)$, $b(y, z)$, $c(z)$, $\alpha(x, y)$ satisfăcînd condițiile

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + ca = 0$$

Ținînd seama de (13′) — care este soluție a primei ecuații — și de (13‴), din a doua ecuație rezultă

$$(13^{\text{IV}}) \qquad b = -\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + Q''\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Cu alte cuvinte, obținem *spațiul A_3 avînd componentele conexiunii nule afară de componentele* (15), *polinoamele* $a(y, z)$, $\alpha(y, z)$, $c(z)$ *și* $b(y, z)$ *fiind de forma* (13′), (13‴) *și* (13^{IV}).

Pentru acest spațiu, sistemul (3) devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \alpha\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + b\frac{\partial V}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Din primele trei ecuații, avem că integrala este de forma

$$V = k_1 x + \varphi(y, z);$$

folosind ultimele ecuații, găsim că funcția $\varphi(y, z)$ satisface sistemul

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - k_1 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1\left(-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \right.$$

$$\left. + Q'' \frac{\partial P}{\partial y}\right) - Q'' \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Primele două ecuații dau

$$\varphi = k_1 P + k_2 y + \psi(z),$$

care, introdusă în a treia ecuație, conduce la

$$\psi'' - k_2 Q'' = 0.$$

Așadar, integrala generală este

$$V = k_1[x + P(y, z)] + k_2[y + Q(z)] + k_3 z + k_4.$$

Deci, *transformarea asociată conexiunii* (15) poate fi luată sub forma

$$\begin{aligned} u &= x + P(y, z) \\ v &= y + Q(z). \\ w &= z, \end{aligned} \tag{15}$$

care este o *transformare cremoniană întreagă.*,

În cazul (4) + (6') se prezintă tot 9 subcazuri; însă, în oricare subcaz, din sistemul (2) + (2') rezultă o condiție care contratice ipoteza.

Ținînd seama că, în cazul (4) + (7), putem folosi transformarea (4'), avem cele 5 subcazuri (11). Nici în aceste subcazuri nu există spații A_3 (în primul și în ultimul subcaz se găsesc ecuații ce nu admit soluție polinomială, în celelalte — condiții de contrazic ipoteza).

Deci, rezultă *propoziția*:

În una din condițiile (4) + (5) — (4) + (7), *iar numai una din componentele* (10) *diferită de zero, componentele* Γ^1_{11}, Γ^2_{22}, Γ^3_{33} *fiind date de formulele* (2'), *există spații* A_3.

Conexiunea unui astfel de spațiu este de forma (15) — *polinoamele* $a(y, z)$, $\alpha(y, z)$, $c(z)$, $b(y, z)$ *fiind* (13'), (13'''), (13^{IV}) — *și corespunde transformării cremoniene întregi* (15').

*

Procedînd în acest fel, putem studia cazurile cînd două sau mai multe din componentele (10) sînt diferite de zero; însă intervin numeroase subcazuri. Astfel, cînd două din componentele (10) sînt diferite de zero, sînt de considerat 168 de subcazuri. Menționăm că în condițiile (4) + (5''), din cele 20 de subcazuri posibile, pot exista spații A_3 numai dacă

$$\Gamma^2_{23} \neq 0, \quad \Gamma^3_{23} \neq 0. \tag{16}$$

Atunci, sistemul (2) + (2′) se reduce la

$$\Gamma^2_{313} = -\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x} = 0, \quad \Gamma^2_{213} = -\frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^3_{212} = -\frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x} = 0 \quad \Gamma^2_{212} = -\frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x} = 0,$$

$$\Gamma^2_{223} = -\frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial y} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{23} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{22} = 0,$$

$$\Gamma^2_{323} = \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial y} - 2(\Gamma^2_{23})^2 - 2\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} = 0,$$

$$\Gamma^3_{223} = \frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial y} + 2(\Gamma^3_{23})^2 + 2\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{23} = 0.$$

Deci obținem *spațiul* A_3 avînd

$$\begin{aligned} &\Gamma^3_{22} = a(y, z), \quad \Gamma^2_{33} = b(y, z), \\ &\Gamma^2_{23} = -\Gamma^3_{33} = c(y, z), \quad \Gamma^3_{23} = -\Gamma^2_{22} = d(y, z) \end{aligned} \tag{17}$$

drept singurele componenre nenule ale conexiunii, polinoamele $a(y, z)$, $b(y, z)$ $c(y, z)$, $d(y, z)$ fiind o soluție a sistemului

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} + 2(c^2 + bd) = 0, \\ &\frac{\partial d}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y} + ab - cd = 0, \\ &\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial d}{\partial y} + 2(d^2 + ac) = 0. \end{aligned} \tag{17'}$$

O soluție a acestui sistem este

$$\begin{aligned} &a = (\nu' - 2\nu^2)z + \varphi[y + \lambda(z)], \; d = \alpha a + \nu, \\ &b = -\alpha^3 a - 3\alpha^2\nu - \alpha', \quad c = -\alpha^2 a - 2\alpha\nu, \\ &\nu = \nu[y + \lambda(z)], \; \lambda(z) = \int \alpha(z)\, dz, \; \alpha = \alpha(z). \end{aligned} \tag{17''}$$

Spațiul A_3 este echivaelnt în mare cu spațiul E_3 numai dacă $\nu = 0$, transformarea topologică ce aplică spațiul A_3 pe spațiul E_3 fiind transformarea cremoniană întreagă

$$T: \begin{aligned} u &= x, \\ v &= y + \lambda(z), \\ w &= z + P[y + \lambda(z)], \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$P[y + \lambda(z)] = -\int\left[\int a(u)\,du\right]du.$$

Observăm că transformarea (18) este produsul transformărilor Jonquière

$$J_1: \begin{array}{l} u = u' \\ v = v' \\ w = w' + P(v') \end{array}, \qquad J_2: \begin{array}{l} u' = x \\ v' = y + \lambda(z), \\ w' = z \end{array}$$

adică

$$T = J_1 J_2 \tag{18'}$$

Dacă $\nu \neq 0$, transformarea asociată spațiului A_3 este

$$S = K \cdot J_2 \tag{20}$$

unde

$$K: \begin{array}{l} u = u' \\ v = \int e^{\int \nu dv'} dv' \\ w = w' e^{-\int \nu dv'} - \int\left[e^{\int \nu dv'} - \int \varphi(v') e^{-2\int \nu dv'} dv'\right] dv' \end{array} \tag{19'}$$

Se cunoaște (v.[4]) și soluția generală a sistemului (17').

De asemenea, menționăm că în condițiile (4) + (5') și (4) + (6') avem 72 de subcazuri. Pentru acete subcazuri nu există spații A_3 cu conexiune polinomială; cu alte cuvinte, sistemul (2) + (2') sau nu admite soluție polinomială sau conduce la o relație ce contrazice ipoteza.

BIBLIOGRAFIE

1. **G. Vrănceanu,** *Sur les espaces à connexion affine localement euclidiens et les transformations crèmoniennes entières,* Rev. de math. pures et appl., Acad. RPR, 1957, t. II, p. 111–125.
2. **G. Vrănceanu,** *Leçons de géométrie différentielle,* vol. II, Edit. Acad. RPR, București, 1957.
3. **Ion D. Teodorescu și Ion Rusu,** *Asupra spațiilor bidimensionale cu conexiune afină local euclidiană și transformările cremoniene întregi,* Analele Univ. București, seria șt. nat., mat.-fiz., 1961, nr. 29, 199–208.
4. **Ion D. Teodorescu,** *Transformările cremoniene întregi și spațiile cu conexiune polinomială, local euclidiene.* Comunicările Acad. RPR., 1963, t. XIII, nr. 11, p. 939–946

5. **Ion D. Teodorescu,** *Studiul unor spații local euclidiene $A_2(x,y)$ cu conexiune polinomială,* Lucrare de disertație pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice, 9 ian. 1964, Fac. de matematică-mecanică, Univ. București.

6. **Ion D. Teodorescu și Nicolae I. Nediță,** *Corespondente între spații afine cu conexiune polinomială și transformările cremoniene întregi,* Analele Univ. București, seria șt. nat., mat-mec.. 1964, nr. 1, p. 101—109.

CORRESPONDANCES ENTRE DES ESPACES AFFINES A_3 À CONNEXION POLINOMIALE

Résumé

Soit $A_3(x,y,z)$ un espace à connexion affine Γ^i_{jk} polynomiale, localement euclidien et à connexion contractée $\Gamma_k = \Gamma^j_{jk}$ nulle; quand nous avons (2) + (2').

On considère que l'espace A_3 est rapporté à un système d'axes donc seulement l'une d'elles est courbe autoparallèle; quand nous avons l'un des cas (4) + (5) — (4) + (7).

On démontre:

1) *Si chaque composante* (10) *est nulle, l'espace A_3 a la connexion de la forme* (9), *où $a(y)$, $b(z)$ et $c(z)$ sont des polynomes. Un tel espace correspond a une transformation cremonienne entière* (9'') + (9).

2) *Si seulement l'une des composantes* (10) *est différente à zero, l'espace A_3 a la connexion de la forme* (15), *où $a(y,z)$, $b(y,z)$, $c(z)$ et $\alpha(y,z)$ sont des polynomes données par* (13), (13''') *e* (13^{IV}).

Un tel espace correspond a une transformation cremonienne entiere (15').

On considère aussi d'autres cas.

SUR LA REPRÉSENTATION DE ŞANDRU DANS LE CAS DES CORPS DU TYPE DE COSSERAT

P. P. TEODORESCU

1. Les équations du type de Lamé dans le cas des corps du type de Cosserat linéairement élastiques, homogènes et isotropes, soumis à des déformations et rotations infinitésimales dans l'absence des forces et des moments volumiques, sont de la forme

$$(1) \qquad (\mu + \alpha)\, \Box_2 \vec{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \text{ grand div } \vec{u} + 2\alpha \text{ rot } \vec{\Phi} = 0,$$

$$(1') \qquad (\mu' + \alpha')\, \Box_2' \vec{\Phi} + (\lambda' + \mu' - \alpha') \text{ grand div } \vec{\Phi} + 2\alpha \text{ rot } \vec{u} = 0,$$

où $\vec{u}$ et $\vec{\Phi}$ sont les vecteurs déplacement et rotation ; λ et μ sont les constantes élastiques du type de Lamé, α este une constante élastique correspondant à l'asymétrie du tenseur tension et λ', μ', α' sont des constantes élastiques analogues, qui apparaissent dans la loi constitutive, qui met en évidence les couples-tension et le gradient de la rotation.

On y a introduit les opérateurs différentiels

$$(2) \qquad \Box_2 = \triangle - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$(2') \qquad \Box_2' = \triangle - \frac{1}{c_2'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4\alpha}{\mu' + \alpha'},$$

où Δ est l'opérateur de Laplace

$$(3) \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et les vitesses de propagation des ondes sont donnése par

$$(4) \qquad c_2^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad c_2'^2 = \frac{\mu' + \alpha'}{\mathcal{J}},$$

ρ étant la masse spécifique et $\mathcal{J}$ étant un moment d'inertie de rotation spécifique.

Mentionnons qu'on utilisera aussi les opérateurs différentiels

$$\Box_1 = \Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\Box_1' = \triangle - \frac{1}{c_2'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4\alpha}{\lambda' + 2\mu'}, \tag{5'}$$

es vitesses de propagation des ondes étant données par

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_1'^2 = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\vartheta}. \tag{6}$$

On observe aussi que, entre ces opérateurs, on a les relations

$$(\lambda + 2\mu)\Box_1 - (\mu + \alpha)\Box_2 = (\lambda + \mu - \alpha)\triangle, \tag{7}$$

$$(\lambda' + 2\mu')\Box_1' - (\mu' + \alpha')\Box_2' = (\lambda' + \mu' - \alpha')\triangle, \tag{7'}$$

qui seront utiles dans se qui suit.

2. N. Şandru [3] a donné, en 1966, une représentation de la solution des équations (1) et (1') à l'aide de deux fonctions vectorielles, représentation qui est de la meme forme que celle donnée par C. Somigliana [2] et M. Iacovache [1] pour le cas des corps classiques.

Nous avons donné récemment [4] une démonstration directe de cette représentation, sa complétitude étant aussi assurée pour un domaine simplement connexe. Dans ce qui va suivre nous allons présenter une simplification de cette démonstration, simplification qui met en évidence aussi d'autres relations.

3. On observe ainsi que les deux invariants

$$\theta = \operatorname{div}\vec{u}, \quad \psi = \operatorname{div}\vec{\Phi} \tag{8}$$

vérifient les équations

$$\Box_1\theta = 0, \quad \Box_1'\psi = 0. \tag{9}$$

En éliminant le vecteur rotation, respectivement le vecteur déplacement entre les équations (1), (1'), on obtient les équations que doivent vérifier chaque vecteur, notamment

$$[(\mu + \alpha)\Box_2 + (\lambda + \mu - \alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}][(\mu' + \alpha')\Box_2' + (\lambda' + \mu' - \alpha')\operatorname{grad}\operatorname{div}]\vec{u} - 4\alpha^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = 0, \tag{10}$$

$$[(\mu + \alpha)\Box_2 + (\lambda + \mu - \alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}][(\mu' + \alpha')\Box_2' + (\lambda' + \mu' - \alpha')\operatorname{grad}\operatorname{div}]\vec{\Phi} - 4\alpha^2\operatorname{rotrot}\vec{\Phi} = 0. \tag{10'}$$

On observe que la première de ces équations peut etre écrite sous la forme

$$D\vec{u} + D_2'\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = 0, \tag{11}$$

tandis que la deuxième équation prend la forme

$$D\vec{\Phi} + D_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Phi} = 0, \tag{11'}$$

où l'on a tenu compte des équations (9) et l'on a introduit les notations

$$D = (\mu + \alpha)(\mu' + \alpha')\Box_2\Box_2' + 4\alpha^2\triangle, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (\lambda' + \mu' - \alpha')(\mu + \alpha)\Box_2 - 4\alpha^2, \\ D_2' &= (\lambda + \mu - \alpha)(\mu' + \alpha')\Box_2' - 4\alpha^2. \end{aligned} \tag{12'}$$

4. En partant de l'équation (11) et en introduisant la notation

$$\operatorname{div} \vec{u} = D\varphi, \tag{13}$$

l'on obtient

$$\vec{u} = \vec{\Omega} - D_2' \operatorname{grad} \varphi, \tag{14}$$

où

$$D\vec{\Omega} = 0. \tag{15}$$

En introduisant (14) dans (13), l'on trouve la condition

$$(\lambda + 2\mu)(\mu' + \alpha')\Box_1\Box_2'\varphi = \operatorname{div} \vec{\Omega}; \tag{16}$$

on introduit la notation

$$\vec{\Omega} = (\lambda + 2\mu)(\mu' + \alpha')\Box_1\Box_2\vec{\Gamma} \tag{17}$$

et l'on observe que le potentiel vecteur doit satisfaire l'équation

$$\Box_1\Box_2' D\vec{\Gamma} = 0. \tag{18}$$

Il résulte ainsi

$$\varphi = \operatorname{div} \vec{\Gamma}, \tag{19}$$

où l'on a négligé une fonction Γ_0, qui vérifie l'équation

$$\Box_1\Box_2'\Gamma_0 = 0 \tag{20}$$

et qui peut etre incluse dans le potentiel vecteur $\vec{\Gamma}$.

On obtient ainsi la représentation

$$\vec{u} = (\lambda + 2\mu)(\mu' + \alpha')\Box_1\Box_2'\vec{\Gamma} - D_2' \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma}, \tag{21}$$

qui est complète pour l'équation (11), dans le cas d'un domaine simplement connexe; le potentiel vecteur $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(x, y, z; t)$ doit vérifier l'équation (18)

D'une manière analogue, pour la fonction $\vec{\Phi}$, qui vérifie l'équation (11′), on obtient

$$\vec{\Phi} = (\lambda' + 2\mu')(\mu + \alpha)\,\Box_1'\Box_2'\vec{\Gamma}' - D_2 \text{ grad div } \vec{\Gamma}', \tag{21'}$$

où le potentiel vecteur $\vec{\Gamma}' = \vec{\Gamma}'(x, y, z; t)$ vérifie l'équation

$$\Box_1'\Box_2 D\vec{\Gamma} = 0. \tag{18'}$$

5. En suivant la démonstration donnée par nous antérieurement [4], c'est à dire en posant la condition que la représentation (21), (21′) vérifie aussi les équations (1), (1′), l'on obtinet la représentation de Şandru sous la forme

$$\vec{u} = (\lambda + 2\mu)(\mu' + \alpha')\,\Box_1\Box_2'\vec{\Gamma} - \tag{22}$$

$$- D_2' \text{ grad div } \vec{\Gamma} - 2\alpha(\lambda' + 2\mu')\,\Box_1' \text{ rot } \vec{\Gamma}'$$

$$\vec{\Phi} = (\lambda' + 2\mu')(\mu + \alpha)\,\Box_1'\Box_2\vec{\Gamma}' - \tag{22'}$$

$$- D_2 \text{ grad div } \vec{\Gamma}' - 2\alpha(\lambda + 2\mu)\,\Box_1 \text{ rot } \vec{\Gamma},$$

où les vecteurs potentiel $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}'$ sont fonctions de la classe C^6, qui vérifient les équations

$$\Box_1 D\vec{\Gamma} = 0, \qquad \Box_1' D\vec{\Gamma}' = 0. \tag{23}$$

On observe que la simplification apportée à cette démonstration assure la complétitude de la solution; de plus, quelques des résultats partiels obtenus présentent un certain intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

1. **M. Iacovache**: *O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elasticității*, Bul. Ştiin. Acad. R.P.R., ser. A, vol. 1, nr. 6, 1949, pp. 592–599.
2. **C. Somigliana**: *Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori*, Atti R. Accad. dei Lincei, Rendiconti, Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 5, vol. 1, nr. 2, 1892, pp. 111–119.
3. **N. Şandru**: *On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., vol. 4, nr. 1, 1966, pp. 81–94.
4. **P. P. Teodorescu**: *Sur le problème dynamique des corps du type de Cosserat*, Rev. Roumaine Math. Purse Appl. vol. 17, nr. 7, 1972, pp. 1097–1106.

Reçu le 8 mai 1973

Université de Bucarest
Faculté de mathématique-mécanique

ASUPRA UNOR PROBLEME ÎN REȚELE FĂRĂ CIRCUITE

C. DINESCU

Sumar. În articolul de față prezentăm cîteva probleme legate de rute în rețele fără circuite și algoritmi specifici acestor rețele. Se dau metode de determinare a rutelor optime (II), a drumurilor hamiltoniene — rute de tip d_H(III) și a rutelor de tip d_c(IV), pe baza unei ordonări speciale a vîrfurilor, numită p-ordonare (I), care caracterizează rețelele fără circuite.

Definiții și notații

O *rețea* $G = (X, \mathcal{A}l)$ este formată dintr-o mulțime $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cel mult numărabilă (mulțimea vîrfurilor), o submulțime $\mathcal{A}$ de elemente distincte din X × X (mulțimea arcelor) și o funcție,

$$l: \mathcal{A} \to R,$$

care asociază fiecărui arc (x_i, x_j), $\mathcal{A}$ numărul real $l(x_i, x_j)$. Rețelele pe care le studiem nu au bucle, nu au circuite, sînt finite și conexe. Vom nota numărul de vîrfuri cu n.

Vom nota prin $d = d(x_i, x_j) = d(i, j)$ un drum de la x_i la x_j și prin D_{ij} mulțimea tuturor drumurilor de la x_i la x_j. Lungimea unui drum $l[d(x_i, x_j)]$ reprezintă suma lungimilor arcelor care-l conpun.

Matricea arcelor $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ... n$, pentru un graf finit este o matrice ale cărei elemente sînt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } (x_i, x_j) \in \mathcal{A} \\ 0, \text{ dacă } (x_i, x_j) \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Introducem și notațiile

$$g_i^+ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ — pentru } \textit{gradul exterior} \text{ al vîrfului } x_i \in X,$$

$$g_j^- = \sum_{K=1}^{n} a_{ki} \text{ — pentru } \textit{gradul interior} \text{ al vîrfului } x_i \in X,$$

precum și aplicația Γ cu valori în mulțimea părților lui X:

$$\Gamma : X \to \mathcal{P}(x).$$

unde $\Gamma(x_i) = \{x_j/(x_i x_j) \in \mathcal{A}\}$. Convenim să notăm şi

$$\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_k/(x_k, x_i) \in \mathcal{A}\}.$$

Asociem unei reţele *matricea lungimilor* $L = (1_{ij})_{i,j=1,\dots n}$.

$$l_{ij} = \begin{cases} l(x_i, x_j) & \text{dacă } (x_i, x_j) \in \mathcal{A},\ i \neq j \\ \pm\infty & \text{dacă } (x_i, x_j) \in \mathcal{A}, i \neq j \\ 0 & \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

Vom numi *putere de atingere* a vîrfului x_i, $p(x_i)$, numărul de vîrfuri atinse prin arce şi drumuri de la x_i.

I. PROBLEMA P-ORDONĂRI ŞI DETERMINAREA EI

Definiţie. Numim *ordonare preferată* sau *p-ordonare* a vîrfurilor unei reţele $G = (X, \mathcal{A}, l)$ o succesiune a acestor vîrfuri,

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

cu $x'_s \neq x'_t$, $s, t = 1, 2, \dots, n$, astfel încît pentru orice arc $(x'_i, x'_j) \in \mathcal{A}$ vîrful x'_j să apară înaintea vîrfului x'_j în această succesiune.

Dacă $x'_i \not\equiv x'_j$, vom nota faptul că x'_i apare înaintea lui x'_j într-o p-ordonare prin: $x'_i \rho x'_j$ şi vom citi x'_j precede pe x'_j. În cazul în care, printr-o renumerotare, p-ordonarea are indicii $1, 2, \dots, n$, acest lucru se mai poate scrie şi sub forma $i < j$. Relaţia ρ între vîrfurile unei reţele este tranzitivă.

Din definiţie unei p-ordonări rezultă că, dacă între vîrfurile $x'_i, x'_j \in X$ există un drum, atunci $x'_i \rho x'_j$.

Teorema 1. O reţea $G = (X, \mathcal{A}, l)$ nu are circuite dacă şi numai dacă există cel puţin o p-ordonare a vîrfurilor sale.

Demonstraţie. Suficienţa. Să presupunem că între vîrfurile relaţiei există p-ordonarea,

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

Presupunînd prin absurd că ar exista un circuit şi anume

$$d(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_{s-1}}, x'_{ji_s})$$

am avea:

$$x'_{i_1} \rho x'_{i_2},\ x'_{i_2} \rho x'_{i_3}, \dots, x'_{i_{s-1}} \rho x'_{i_1}.$$

Aceasta ar însemna că $x'_{i_1} \rho x'_{i_1}$ ceea ce nu este posibil conform definiţiei relaţiei ρ.

Necesitatea. Pentru realizarea unui p — ordonări, pornim de la o rețea cu toate vîrfurile și fără nici un arc și introducem succesiv cîte un arc al rețelei.

Evident, dacă rețeaua are zero arce, G_0, orice ordonare a vîrfurilor este o p-ordonare. Să adăugăm lui G_0 arcul (x'_i, x'_i), obținînd rețeaua G_1. Dacă în p-ordonarea din G_0 avem $x'_i \rho x'_j$, atunci aceasta este p-ordonarea vîrfurilor din G_1. Dacă, însă, avem $x'_j \rho x'_i$, așezăm vîrful x'_i imediat înainte lui x'_j și aceasta va fi p-ordonata vîrfurilor în G_1.

Să considerăm acum că avem rețeaua G_s, în care există o p-ordonare a vîrfurilor, fie la $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ și să adăugăm la G_s arcul (x'_i, x'_j), obținem rețeaua G_{s+1}.

Dacă avem $x'_i \rho x'_j$ în p-ordonarea din G_s, atunci aceasta este p-ordonarea în rețeaua G_{s+1}.

Dacă avem $x'_j, \rho x'_i$ atunci așezăm x'_i imediat înaintea lui x'_j și fie

$$x'_{k_1}, x'_{k_2}, \ldots, x'_{k_p},$$

mulțimea vîrfurilor dintre x'_j și x'_i, legate prin arce de x'_j. (1). Atunci așezăm toate vîrfurile x'_{k_α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ înaintea vîrfului x'_k, păstrînd ordinea dintre ele.

(ii). Apoi, pentru fiecare vîrf x'_{k_α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ alegem vîrfurile dintre x'_j și x'_k din p-ordonarea din G, din care pleacă arce spre x'_{k_α} și fie acestea

$$x'_{r_1}; x'_{r_2}, \ldots, x'_{k_\beta}.$$

Așezăm toate vîrfurile, $x'_{r_1}, x'_{r_2}, \ldots, x'_{r_\beta}$ înaintea lui x'_{k_α} păstrînd ordinea dintre ele. Operațiile (i) și (ii) continuă atît cît este posibil.

Să arătăm că, prin metoda descrisă, în rețeaua G_{s+1} s-a realizat o p-ordonare a vîrfurilor. Pentru aceasta este suficient să arătăm că oricare ar fi arcul (x'_s, x'_t) din G_{s+1} avem $x'_s \rho x'_t$. Avem de cercetat două situații:

a) Cazul arcului (x'_j, x'_i) nu poate exista în G_{s+1} și nici în G, deoarece am avea circuitul

$$d(x'_i, x'_j, x'_i).$$

b) Cazul unui arc de forma (x'_j, x'_t), unde x'_t este un vîrf a cărui poziție a fost determinată de existența în G_{s+1} a drumului $d(x'_t, x'_i)$, care de asemenea, nu poate exista, deoarece rețeaua arc conține circuitul:

$$d(x'_i, x'_j, x'_t, \ldots, x'_i).$$

În concluzie, vîrfurile dintre x'_j și x'_j au un loc conform unei p-ordonări din G_{s+1}. Vîrfurile care în p-ordonarea din G_s nu erau între x'_j și x'_i își păstrează locul în p-ordonarea lui G_{s+1}, cu intercalările efectuate mai sus.

Dacă metoda descrisă mai sus este aplicată succesiv, prin introducerea a cîte unui arc, se obține în final o p-ordonare a vîrfurilor rețelei G.

Teorema 2. Orice reţea $G = (X, \mathcal{A}, l)$ fără circuite admite cel puţin o intrare $x_j \in X(g_j^- = 0, g_k^+ > 0)$ şi o ieşire $x_j \in X(g_j^+ = 0, g_j^- > 0)$.

Demonstraţia acestei teoreme este imediată.

Fie o reţea $G = (X, \mathcal{A}, l)$ fără circuite şi

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n,$$

o p-ordonare a vîrfurilor sale. Dacă reordonăm liniile şi coloanele matricei A a arcelor lui G în ordinea dictată de p-ordonare, atunci matricea obţinută, A', este triunghiulară superior. Într-adevăr, să presupunem că am numerotat liniile şi coloanele în A' şi există $a'_{ij} = 1$ pentru $j > i$. Aceasta ar însemna că $x'_i \rho x'_j$ şi totuşi $i > j$, ceea ce este absurd.

Din cele de mai sus rezultă un algoritm (A) de determinare a unui p-ordonări între vîrfurile unei reţele date.

DESCRIEREA ALGORITMULUI A.

Pasul 1. Alegem dintre vîrfurile reţelei pe acela a cărui coloană din matricea arcelor A are toate elementele egale cu 0 şi-l notăm x'_1. El va fi primul vîrf al ordonării. Dacă există mai multe vîrfuri cu această proprietate, ele vor constitui primele vîrfuri ale succesiunii, ordinea dintre ele fiind arbitrară.

Pasul 2. Eliminăm din matricea A liniile şi coloanele selectate, iar în matricea rămasă procedăm asemănător cu pasul 1, pentru a determina vîrfurile care urmează în succesiunea căutată.

Pasul 3. Repetăm pasul 2 pînă cînd au fost selectate toate vîrfurile reţelei.

II. PROBLEMA DETERMINĂRII RUTEI OPTIME ÎNTRE ORICARE DOUĂ VÎRFURI ALE REŢELEI FĂRĂ CIRCUITE.

Problema de care ne ocupăm în această secţiune este următoarea: Fiind dată o reţea $G = (X, \mathcal{A}, l)$ şi $x_i, x_j \in X$ se cere să se găsească drumul $d_{opt}(x_i x_j)$ sau drumul $d_{M,m}(x_i, x_j)$ astfel încît să avem:

$$l[d_M(x_i, x_j)] = \max \{l[d(x_i, x_j)] / d \in D_{ij}\},$$

$$l]d_m(x_i, x_j)] = \min \{l[d(x_i, x_j)] / d \in D_{ij}\}.$$

unde

$$D_{ij} \neq \emptyset.$$

Aceasta este problema rutei optime, pe larg cercetată în literatura de specialitate, propunîndu-se algoritme eficiente de către Dijestra, Whiting, Dantzig, Ford, Moore pentru rutele optime între diverse

vîrfuri precum și algoritme mai generale propuse în referințele [1], [2].

Noi întreprindem un studiu special pentru rețele fără circuite, care comportă mai puține calcule în raport cu alegoritmi generali, datorită formei particulare a matricei capacităților pentru determinarea matricei drumurilor maxime,

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})_{i,\, j = 1, 2, \ldots, n}$$

în care:

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{cases} l[d_M(x_i, x_j)], \; i \neq j, \; D_{ij} \neq \emptyset \\ -\infty, \; i \neq j, \; D_{ij} = \emptyset \\ 0, \quad i = j. \end{cases}$$

Fie $G = (X, \mathcal{A}, l]$ o rețea fără circuite și fie o p-ordonare a vîrfurilor sale de forma: $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Presupunînd lungimile acelor strict pozitive, ne propunem să obținem o nouă matrice ale cărei linii și coloane să păstreze p-ordonarea și ale cărei elemente să fie egale cu lungimile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei. Să notăm această matrice prin:

$$\mathcal{M}' = (\mathcal{M}'_{ij})_{i,\, j = 1, 2, \ldots, n},$$

unde prin $\mathcal{M}'_{ij}$ am notat lungimea maximă a drumurilor de la x'_i la x'_j cu condiția ca $\mathcal{M}'_{ij} = -\infty$, dacă G nu conține nici un drum de la x'_i la x'_j și $\mathcal{M}'_{ij} = 0$ pentru $i = j$.

Fie de asemenea matricea ajutătoare $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,\, j = 1, 2, \ldots, n}$ ale cărei linii și coloane păstrează p-ordonarea dată, matrice definită după cum urmează:

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathcal{M}'_{ij}, \text{ dacă } i \neq j \text{ și există cel puțin un drum } d(x'_i, x'_j) \text{ în } G. \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

În sfîrșit fie matricea $Q = (q_{ij})_{i,j = 1, 2, \ldots, n}$ ale cărei linii și coloane păstrează de asemenea p- ordonarea și definită în modul următor:

$$q_{ij} = \begin{cases} l(x'_i, x'_j), \text{ dacă } i \neq j \text{ și } (x'_i, x'_j) \in \mathcal{A}, \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Teorema 3. Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ o rețea fără circuite cu un n vîrfuri și fie $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, o p-ordonare a vîrfurilor sale,. Atunci avem:

$$\mathcal{M}'_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{\substack{k>i \\ q_{ik} \cdot p_{kj} \neq 0}} \{q_{ij}, q_{ik} + p_{kj}\}, \text{ dacă } i < j \text{ și } \max\limits_{\substack{q_{ik} \cdot p_{kj} \neq 0}} \{q_{ij}, q_{ik} + p_{kj}\} \neq 0 \\ -\infty, \text{ dacă } i < j \text{ și } \max\limits_{\substack{q_{ik} \cdot p_{ki} \neq 0}} \{q_{ij}, q_{ik} + p_{kj}\} = 0, \\ -\infty, \text{ dacă } i > j, \\ 0, \text{ dacă } i = j. \end{cases}$$

Demonstrație a) Din definiția matricei $\mathcal{P}$, rezultă că pentru $p_{ki} \neq 0$ avem $\mathcal{M}'_{kj} = p_{kj}$.

Fie acum vîrfurile x'_i, $x'_j \in X$, $i < j$ pentru care avem:

$$\max_{q_{ik} \cdot p_{kj} \neq 0} \{q_{ij}, q_{ik} + p_{kj}\} \neq 0.$$

De aici rezultă că există cel puțin un drum de la x'_i la x'_j format fie din arcul (x'_i, x'_j), dacă $q_{ij} > 0$, fie de forma $d(x'_i, x'_k, \ldots, x'_j)$ dacă există cel puțin un indice $k \neq j$ pentru care $q_{ik} \cdot p_{kj} \neq 0$. Să notăm mulțimea de indici,

$$K = \{k / q_{ik} p_{kj} \neq 0\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}, \; m < n.$$

Pentru orice $k_s \in$ K avem $q_{ik_s} > 0$ $p_{k_s j} > 0$ sau

$$q_{ik_s} > 0 \text{ și } \mathcal{M}'_{k_s j} > 0.$$

Din aceste condiții rezultă că $(x'_i, x'_{k_s} \in) \mathcal{A}$ și există cel puțin un drum de la x'_{k_s} la x'_j iar maximul sumelor

$$q_{ik_s} + \mathcal{M}'_{k_s j} = q_{ik_s} + p_{k_s j},$$

reprezintă, conform teoremei de optimalitate a lui Bellman, lungimea drumului maxim de la x'_i la x'_j, care începe cu arcul (x'_i, x'_{k_s}). Pe de altă parte, $k_s >$ i, $s = 1, 2, \ldots, m$. În sfîrșit, dacă $k \notin$ K, din condiția $q_{ik} \cdot p_{kj} = 0$ rezultă că nu există în G nici un drum de la x'_j la x'_i în care vîrful x'_k să succeadă vîrfului x'_i.

Dacă se consideră și cazul existenței drumului format dintr-un singur arc $d(x'_i, x'_j) = q_{ij}$ rezultă concluzia a).

b) Să considerăm acum două vîrfuri diferite din G, x'_i și x'_j, cu $i < j$, pentru care avem:

$$\max_{q_{ik} \cdot p_{kj} \neq 0} \{q_{ij}, q_{ik} + p_{kj}\} = 0.$$

Din această relație rezultă pe de o parte că $q_{ij} = 0$, adică nu există arcul (x'_i, x'_j) în G. Pe de altă parte, presupunînd prin absurd că ar exista în G un drum de cel puțin două arce de la x'_i la x'_j, acest drum ar fi de forma $d(x'_i, x'_k, \ldots, x'_j)$ cu $k \neq j$, ceea ce ar conduce la concluzia că există în G cel puțin un vîrf x'_k, cu $k > i$, pentru care avem $q_{ik} \neq 0$ și $p_{kj} \neq 0$. Această concluzie contrazice însă condiția că $q_{ik} + p_{kj} = 0$, ceea ce înseamnă că G nu conține în realitate nici un drum de la x'_i la x'_j, de cel puțin două arce.

Strîngînd cele două concluzii, rezultă că G nu conține nici un drum de la x'_i la x'_j, ceea ce înseamnă că $p_{ij} = 0$, iar $\mathcal{M}'_{ji} = -\infty$ și deci a doua parte a teoremei este demonstrată.

c) Considerînd două vîrfuri diferite din G, x'_i și x'_j cu $i > j$, se știe că în aceste condiții G nu conține nici un drum de la x'_i la x'_j, deci să $p_{ij} = 0$, iar $\mathcal{M}'_{ij} = -\infty$.

d) Deoarece G nu conține circuite, evident că pentru $i = j$ avem $\mathcal{M}'_{ij} = 0$

Teorema 4. Fie G o rețea fără circuite cu n vîrfuri și o p-ordonare $x_1, \ldots, x_n$. Dacă există un indice k, k $\neq$ i și $k \neq j$ astfel încît

$$\mathcal{M}'_{ij} = q_{ik} + p_{kj}; \; p_k \neq 0,$$

atunci în G există un drum maxim de la x'_i la x'_j, care începe cu arcul (x'_i, x'_k) și reciproc.

Demonstrație. Din $p_{kj} \neq 0$ rezultă că $p_{kj} = \mathcal{M}'_{ij}$ și conform teoremei de optimalitate trebuie să avem și $q_{ik} = \mathcal{M}'_{ij}$.
Reciproc, dacă G conține un drum maxim de forma $d(x_i, x'_k, \ldots, x'_j)$ cu $k \neq j$, atunci el este format evident din subdrumuri optime cu $\mathcal{M}'_{ik} = q_{ik}$ și $\mathcal{M}'_{kj} = p_{kj} \neq 0$ deci există un indice $k \neq j$, $k \neq i$ astfel încît

$$\mathcal{M}_{ij} = q_{ik} + p_{kj} \neq 0.$$

Din teoremele 3, 4 rezultă un algoritm de determinare a rutelor maxime între oricare două vîrfuri, folosind p-ordonarea.

DESCRIEREA ALGORITMULUI B

Pasul 1 Determinăm o p-ordonare pevîrfurile rețelei date și reordonăm vîrfurile. Obținem matricea Q.

Pasul 3. Completăm pornind de jos în sus, liniile matricei $\mathcal{P}$ făcînd următoarele operații:

a) Toate elementele de pe diagonala principală și de sub această diagonală sînt egale cu zero.

b) Să presupunem că au fost completate ultimele k linii ale lui $\mathcal{P}$ și că ele corespund vîrfurilor $x'_{n-k+1}, x'_{n-k+2}, \ldots, x'_n$. Trecem la completarea liniei x'_{n-k}, ale cărei elemente nescrise le calculăm astfel:

Elementul $p_{n-k,l}$ $(l > n - k)$ se obține transpunînd linia x'_{n-k} din matricea Q și așezînd-o peste coloana x'_l din matricea Q (parțial scrisă). Se efectuează sumele finite. Elementul $p_{n-k,l}$ este egal cu valoarea maximă dintre elementul $a'_{n-k,l}$ și sumele obținute.

Pasul 4. În matricea P, obținută ca mai sus, înlocuim fiecare element egal cu zero prin $-\infty$, cu excepția elementelor așezate pe diagonala principală. Matricea finală astfel obținută este matricea $\mathcal{M}'$.

Pasul 5. Marcăm elementele $\mathcal{M}'_{ij} = q_{ij}$, în matricea $\mathcal{M}$. Pentru a găsi un drum de lungime maximă de la x'_i la x'_j în G, transpunem linia x'_i a matriei $\mathcal{M}'$ și o așezăm peste coloana x'_j a aceleași matrice. Există un element marcat fie el $\mathcal{M}'_{ik}$ conform teoremei 4. Dacă lui îi corespunde un element finit și diferit de zero al coloanei x'_j, atunci primul arc al drumului optim este (x'_i, x'_k). Dacă nu, drumul optim nu există. Dacă există drumul optim, suprapunem linia x'_k transpusă peste coloana x . Să presupunem că elementul $\mathcal{M}'_{kl}$ marcat s-a suprapus peste un element finit și diferit de zero al coloanei x'_j. Atunci arcul următor al drumului maxim de la x'_i la x'_j este arcul (x'_k, x'_l). Continuînd în modul arătat, se ajunge la x'_j.

Dacă la una dintre suprapuneri avem două sau mai multe sume maxime $\mathcal{M}'_{\alpha\beta}$ egale, există mai multe drumuri maxime între x'_j, și x'_j care se determină separat.

III DETERMINAREA RUTEI DE TIPUL d_H

În scopul testării existenţei drumului de tip d într-o reţea fără circuite precum şi al determinării ei efective, în cazul că există, folosim relaţia de p-ordonare pe vîrfurile reţelei, introdusă în I

Lema 1. Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ reţea fără circuite unde $|X| = n$, între vîrfurile căreia s-a stabilit o p-ordonare de forma:

$$(2)\quad x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, \ldots, x'_n.$$

Dacă $(x'_k, x'_{k+1}) \notin \mathcal{A}$
există cel puţin încă o p-ordonare pe X.

Demonstraţie: Considerînd succesiunea vîrfurilor de forma

$$(3)\quad x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1}, x'_{k+1}, x'_k, \ldots, x'_n,$$

ea păstrează proprietatea de definiţie a unei p-ordonări.

Într-adevăr pentru orice arc $(x'_s, x'_t) \in \mathcal{A}$, avem $x'_s \rho x'_t$ atît în 2 cît şi în 3.

Teorema 5. Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ cu $|X| = n$ o reţea fără circuite. Condiţia necesară şi suficientă să conţină un drum de tip d_H, este ca între vîrfurile sale X să existe o singură p-ordonare.

Succesiunea vîrfurilor în drumul d este dată de succesiunea lor din p-ordonarea existentă.

Demonstraţie: Necesitatea. Să presupunem, mai întîi, că G conţine drumul

$$d_H = d(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, x'_n).$$

Rezultă că

$$(x'_1, x'_2), (x'_2, x'_2), \ldots, (x'_{n-1}, x'_n) \in \mathcal{A}.$$

Să arătăm că succesiunea,

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n,$$

este o p-ordonare.

Fie $(x'_i, x'_j) \in \mathcal{A}$. Atunci $i < j$, deoarece în caz contrar am avea $i > j$ şi G ar conţine subdrumul $d_1 \subset d$ de forma

$$d_1(x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_i),$$

care determină un cricuit cu arcul (x'_i, x'_j). Aceasta este singura p-ordonare posibilă. Într-adevăr presupunînd, prin absurd, existenţa unei alte p-ordonări, aceasta trebuie să admită cel puţin o inversiune de indici, avînd $x_j \rho x_i$ cu $i < j$.

De asemenea, $x'_j \neq x'_n$. În acest caz, rețeau G conține, pe de o parte, drumul parțial d_1 $(x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_i)$ inclus în d_H, pe de altă parte, deoarece $i < j$, drumul parțial $d(x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_j)$, deci un circuit, ceea ce este contrar ipotezei.

Suficiența. Să presupunem acum că pentru rețeaua G există o singură p-ordonare, de forma

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n,$$

Să considerăm două vîrfuri consecutive oarecare din această ordonare x'_k, x'_{k+1}. Rețeaua trebuie să conțină arcul (x'_k, x'_{k+}), deoarece în caz contrar, ar fi contrazisă concluzia lemei 1. În consecință G conține arcele (x'_1, x'_2), (x'_2, x'_3) ,..., (x'_{n-1}, x'_n), și deci drumul,

$$d(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, x'_n),$$

care este drum de tip d_H în G, ceea ce trebuia demonstrat.

Corolar Orice rețea $G = (X, \mathcal{A}, l)$ fără circuite, poate conține un singur drum de tip d_H.

Rezultatele de mai sus permit construirea unui algoritm de calcul, pentru determinarea unui drum de tip d_H, într-o rețea fără circuite, în cazul că un asemenea drum există.

DESCRIEREA ALGORITMULUI C

Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ rețea fără circuite cu $|X| = n$.

Pasul 1 — Se determină o p-ordonare pe mulțimea vîrfurilor X. Dacă la fiecare etapă a p-ordonării se găsește mai mult de cît un vîrf, rețeaua G nu admite drum de tipul d_H în caz contrar G conține un drum de tip d_H și se trece la pasul următor.

Pasul 2 — Determinarea efectivă a drumului d_H se face consider în succesiunea vîrfurilor lui, succesiune dată de p-ordonarea obținută la pasul 1. Pasul 2 este justificat de teorema 5.

Cercetarea noastră are în vedere și următorul caz:

Fiind dată o rețea fără circuite, care nu admite drumul d_H, să se găsesc acele arce care adăugate rețelei, aceasta să admită un drum de tip d_H să și rămînă prin această adăugare de arce fără circuite.

Teorema 6 — Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ rețeaua fără circuite, pentru care există o p-ordonare a vîrfurilor de forma:

$$(4) \quad x'_1, x'_2, \ldots, x'_n,$$

astfel încît rețeaua G nu conține arcul (x'_k, x'_{k+1}). Dacă se adaugă rețelei G acest arc, rețeaua obținută nu are deasemenea circuite.

Demonstrație p-ordonarea (4) este de asemenea p-ordonare și pentru rețeaua G' obținută prin adăugarea la G a arcului $(x'_k, x'_{k+'})$. Existînd astfel de ordonare pentru rețeaua G', conform teoremei (5), G' nu va avea circuite.

Din teorema 5 și 6 rezultă o regulă practică de determinarea unor arce, care adăugate la o rețea fără circuite aceasta să admită un drum de tip d_H. Astfel, determinăm o ordine preferată a vîrfurilor rețelei, de forma; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ și adăugăm rețelei arele de forma (x'_k, x'_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, n-1$, pe care nu le avea inițial.

IV. DETERMINAREA RUTEI DE TIPUL d_c.

Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ o rețea fără circuite cu n vîrfuri notate $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fie de asemenea $x_1 \in X$ și $x_n \in X$ și Din $\neq \emptyset$.

Se pune problema alegerii acelor drumuri de la x_1 la x_n care trebuie să treacă prin k vîrfuri fixate anterior $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, fără a se impune inițial și o anumită ordine între ele.

Rezultatele care urmează arată în ce caz problema are sau nu soluție.

Lema 2. Fie o rețea G, $x_i, x_j \in X$, $D_{ij} \neq \emptyset$.

Dacă notăm cu $p(x_i)$ și $p(x_j)$ puterile de atingere corespunzătoare celor două vîrfuri avem:

$$p(x_i) \geqslant p(x_j)$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că orice vîrf x_k al rețelei, atins de x_j este atins și de vîrful x_i Într-adevăr, existența în rețea a unui drum de forma $d(x_j, x_k)$, împreună cu existența, conform ipotezei a unui drum $d(x_i, x_j)$ conduc la concluzia că rețeaua conține un drum $d(x_i, x_k)$. Menționăm că în acest raționament, vîrful x_k poate coincide și cu oricare din bîrfurile x_i și x_j.

Teorema 7 Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ o rețea $x_i, x_j \in X$, astfel încît x_i atinge x_j. Dacă $p(x_i) = p(x_j)$ atunci G conține cel puțin un circuit.

Demonstrație. Fie $s = p(x_j)$ și $S = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_k\}$ mulțimea vîrfurilor atinse de vîrful x_j. Dacă $x_i \in S$, rețeaua are cel puțin un circuit ce trece prin vîrfurile x_i și x_j. Să presupunem deci că $x_i \notin S$.

Dar din faptul că x_i atinge pe x_j rezultă că toate vîrfurile din mulțimea S sînt atinse și din x_j. În plus, deoarece x_i atinge pe x_j, iar cele două puteri de atingere ale lor trebuie să fie egale, rezultă că $x_j \in S$, adică rețeaua conține cel puțin un circuit care trece prin vîrful x_j.

Teorema 8. Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ rețea fără circuite unde $|X| = n$. O condiție necesară pentru existența drumului,

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$$

este ca:

$$(5)\quad p(x_{i_1}) > p(x_{i_2}) > \ldots > p(x_{i_s})$$

Prin rută de tip d înțelegem o rută care trece prin anumite vîrfuri fixate anterior, ale rețelei.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm relația (5) pentru două vîrfuri consecutive. Fie x_i și x_j două vîrfuri consecutive care fac parte din drumul $d(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$. Deoarece rețeaua conține arcul (x_i, x_j), conform lemei 2. Avem:

$$p(x_i) \geqslant p(x_j)$$

Să presupunem prin absurd că $p(x_i) = p(x_j)$. Atunci conform teoremei 7 rețeaua ar conține cel puțin un circuit ceea ce contrazice ipoteza. Urmează că trebuia să avem:

$$p(x_i) > p(x_j),$$

ceea ce justifică teorema.

Corolar. Fie $G = (X, \mathcal{A}, l)$ o rețea fără circuite cu n vîrfuri și $x_1, x_n \in X$. Dacă rețeaua G conține cel puțin un drum de la x_1 la x_n din mulțimea de drumuri care trec prin vîrfurile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ (diferite de x_1 și x_n), atunci ordinea în care se succed aceste vîrfuri în drumul optim este dată de ordinea strict descrescătoare a puterilor lor de atingere în rețea.

Observații. 1. Dacă între vîrfurile $x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}, x_n$, nu se poate stabili o ordine strict descrescătoare a puterilor de atingere, începînd cu x_1 și terminînd cu x_n, atunci rețeaua nu poate conține un drum optim care să treacă prin vîrfurile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$.

2. În cazul în care există ordine de felul celei de mai sus între vîrfuril $x_1, x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_s}, x_n$, nu avem certitudinea că rețeaua conține cel puțin drum de la x_1 la x_n, trecînd prin $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$. Un astfel de drum există (deci și cel puțin un drum optim), dacă rețeaua conține în plus cel puțin cîte un drum între oricare dintre perechile de vîrfuri alăturate din succesiunea obținută.

3. Conform principiului de optimalitate, drumul optim căutat trebuie să fie format din subdrumuri optime, deci la rîndul lor subdrumurile:

$$d(x_1, x_{i_1}), d(x_{i_1}, x_{i_2}), \ldots, d(x_{i_k}, x_n),$$

trebuie să reprezinte drumuri optime între vîrfurile corespunzătoare în graful G.

DESCRIEREA ALGORITMULUI D

Pasul 1. Aplicînd unul din algoritmele corespunzătoare, scriem matricea care dă lungimile maxime $\mathcal{M}$ (respectiv minime M) ale drumuriloe dintre oricare două vîrfuri ale grafului G.

Pasul 2. Scriem vîrfurile fixate $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{ik}$ împreună cu vîrfurile x_1 și x_n într-o ordine strict descrescătoare a puterilor de atingere, sub forma:

$$x_1, x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_k}, x_n.$$

Dacă o astfel de ordine nu există, problema dată este imposibilă conform observaţiei 1. În caz contrar trecem la pasul următor.

Pasul 3 — Cu ajutorul matricei $\mathcal{M}(M)$ scrisă la pasul 1 determinăm drumurile optime $d(x_1, x_{s_1})$, $d(x_{s_1}, x_{s_2})$,..., $d(x_{s_k}, x_n)$, dacă există, ale căror succesiuni de vîrfuri le aşezăm în continuare, păstrînd ordinea impusă de pasul 2 şi fără să repetăm extremităţile x_{s_2}, x_{s_k} ale acestor drumuri.

Se obţine astfel drumul optim căutat.

Primit la 1 X 1973

Academia de studii economice
Bucureşti

O SOME PROBLEMS IN NETWORKWITHOUT CIRCUITS

Abstract

The present work is about four problems (I, II, III, IV) connected with the net without circuits.

Problem I, introduces the notion of p-order of vertices of the net, and a characterization of the net without circuits is deduced, in connection to the p-ordering.

Problems II and III are about the determination of the path (optimal, hamiltonian), using the results from problem I.

Problem IV is about the optimal path, which passes through specified vertices.

For each problem, the corresponding computing algorithms are given.

BIBLIOGRAFIE

1. **Roy B.** Cheminement et Coonexite dans les Graphes: Application aux Probleme d'Ordonnacement Societe d'Economie et de Mathematique Appliqee, Paris, 1961.
2. **Harary, F. Norman R.Z.** and **Cartwright D.** Structural Models: An introduction la the theory of directed graphs.
3. **Chen Y and Wing O.** Connectivity of Directed Graphs Proc. of Sec. Ann All Conf an Circuit and Systems Th, Univ, Of 111, 1964.
4. **C. Dinescu** (şi colab) Teoria reţelelor în lucrările topografice. Rev. Cad., 1972.
5. **C. Dinescu** (şi alţii) Probleme ale cercetării operaţionale. Ed. Did. şi Ped, 1972.

VIAȚA FACULTĂȚII

ACAD. GRIGORE C. MOISIL
1906—1973

GRIGORE C. MOISIL

Din partea Academiei Republicii Socialiste România şi a Ministerului Educaţiei şi Învăţămîntului

Academia Republicii Socialiste România şi Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului anunţă cu profundă durere încetarea din viaţă a academicianului profesor Grigore C. Moisil, reputat savant, personalitate de seamă a ştiinţei şi învăţămîntului superior din ţara noastră.

Academia Republicii Socialiste România
Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului

Academia Republicii Socialiste România

Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntulut

În ziua de 21 mai 1973 a încetat subit din viaţă, în timp ce se afla în Canada ca invitat al unor universităţi, academicianul Grigore C. Moisil.

Născut la Tulcea, la 10 ianuarie 1906, într-o familie de profesori, a urmat cursurile Facultăţii de ştiinţe — secţia matematică — a Universităţii din Bucureşti. În 1929 obţine titlul de doctor în matematici cu o teză remarcabilă privind mecanica analitică a sistemelor continue, lucrare ce la consacrat în viaţa ştiinţifică din ţară şi de peste hotare. A făcut studii de specialitate la Paris şi Roma După obţinereo docenţei în analiza matematică este numit, în 1932, conferenţiar la Universitatea din Iaşi, iar în 1942 profesor şi şef de catedră la Universitatea din Bucureşti. În decursul unei strălucite cariere didactice de peste 40 de ani, profesorul Moisil a format o întreagă pleiadă de valoroşi matematicieni.

Activitatea ştiinţifică şi didactică a acad. Gr. C. Moisil a cuprins domenii dintre cele mai variate, în fiecare dintre acestea aducînd contribuţii remarcabile, idei noi, uneori de pionierat. Acad. Gr. C. Moisil a abordat cu succes o serie întreagă de probleme din domeniul geometriei diferenţiale, mecanicii analitice a sistemului continue, de logică matematică, al hidrodinamicii, al mecanicii generale, elasticităţii, teoriei probabilităţilor, lingvisticii matematice etc. Prin activitatea sa, pusă în slujba intereselor construcţiei socialiste, a adus o contribuţie însemnată la introducerea şi folosirea primelor maşini electronice de calcul în ţara noastră.

Opera ştiinţifică a acad. Gr. C. Moisil a avut şi are un larg ecou în lumea ştiinţifică internaţională. Monografiile pe care le-a publicat în domeniul teoriei algebrice a mecanismelor automate au fost traduse în numeroase limbi. Membru a numeroase academii şi societăţi ştiinţifice străine, invitat de multe universităţi de peste hotare pentru lecţii şi conferinţe, participant la reuniuni ştiinţifice internaţionale de mare prestigiu, acad. Gr. C. Moisil a reprezentat pretutindeni cu strălucire şcoala matematică românească.

Acad. Gr. C. Moisil a contribuit printr-o prezenţă vie, la înţelegerea funcţiei sociale a matematicii, a rolului ei în construirea societăţii socialiste. Ca preşedinte al Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România a dezvoltat o largă activitate de educare matematică a tineretului, de organizare a activităţii de perfecţionare a profesorilor de matematică.

Participant activ la opera de construire a socialismului în ţara noastră, membru al Partidului Comunist Român, acad. prof. Grigore C. Moisil a adus contribuţii valoroase la răspîndirea cunoştinţelor ştiinţifice, la modernizarea învăţămîntului, la legarea ştiinţei de cerinţele dezvoltării economiei şi culturii. Între anii 1946—1949 a fost ambasadorul ţării noastre în Turcia.

Pentru meritele sale deosebite în opera de construire a socialismului, în activitatea ştiinţifică, didactică şi obştească, academicianul Grigore C. Moisil a fost distins cu titlurile de „Laureat al Premiului de Stat", „Om de ştiinţă emerit", cu numeroase ordine şi medalii Republicii Socialiste România. În 1971 a primit titlul de Erou al Muncii Socialiste.

Prin moartea academicianului Grigore C. Moisil, ştiinţa şi cultura românească suferă o grea pierdere.

Academia Republicii Socialiste România

Ministerul Educaţiei si Învăţămîntului

Îndoliată adunare

O veste năprasnică a zguduit întreaga Universitate, întreaga țară, întreaga lume științifică. A încetat din viață profesorul Grigore Moisil, departe de țara sa, în Canada, unde, ca strălucit mesager al științei și culturii românești, începuse să-și prezinte contribuțiile sale care se înscriu în circuitul marilor valori mondiale.

Astăzi, cu nețărmurită durere, ne luăm ultimul rămas bun de la prof. acad. Grigore C. Moisil, personalitate științifică care se înscrie în istoria Universității, a științei și culturi noastre ca unul din cei mai onorați și veritabili oameni de știință ce și-a închinat întreaga sa putere de muncă, talentul și inteligența sa învățămîntului și științei. A fost creator de școli științifice în direcții de dezvoltare de o deosebită actualitate, școli care au contribuit la creșteea prestigiului internațional al științei românești. În algebră, ecuații diferențiale, teoria mecanismelor automate, logică matematică, calculatoare electronice a adus contribuții fundamentale, remarcabile, deschizătoare de drumuri noi în știință, mobilizînd în jurul său tineri de mare talent.

Ca profesor șef de catedră și membru al Senatului Universității a fost un exemplu pentru corpul profesorul și studenți, de slujire cu devotament a școlii, pentru pasiunea cu care promova cele mai noi domenii ale științei contemporane.

Prelegerile sale captivau auditoriul, îl entuziasmau pentru claritatea și profunzimea ideilor prezentate, pentru perspectivele ce le deschidea, care generau noi contribuții în dezvoltarea științei. Prin autoritatea și umanismul său de necontestat, cultiva ca nimeni altul în conștiința studenților și tinerilor cercetători pasiunea pentru muncă, pentru creativitate. Membru al P.C.R. a îndeplinit sarcini de mare răspundere, muncind cu devotament pentru promovarea politicii partidului nostru.

Spirit generos, om de mare cultură, înzestrat cu deosebite calități umane, cu o logică și o elocință remarcabilă, în Senatul Universității prin intervențiile sale, prin atitudinea sa deschisă prin critica sa ascuțită, prin ironia fină — caracteristice personalității prof. Grigore C. Moisil, a militat pentru ridicarea întregii activității din Universitatea noasrră la nivelul exigențelor actuale ale științei și culturii mondiale. Omul datoriei și omul de inimă, receptiv la tot ce este nou, a fost un sfătuitor generos al tututror celor care l-au cunoscut.

Proof. Grigore C. Moisil, strălucit reprezentant al intelectualității noastre, este cunoscut în cercuri largi din țară și străinătate pentru bogata sa activitate

pentru integrarea sa în viața social-politică a țării. Eseurile sale erau așteptate cu nerăbdare să apară în revistele noastre culturale, pentru ideile lor novatoare îndrăznețe, privind cele mai actuale probleme ale matematicii sau ale vieții științifice și culturale, pentru forma lor impecabilă.

Prin munca sa și-a cîștigat prețuirea unanimă, încrederea tuturor celor care a muncit, a impulsionat energiile creatoare ale tuturor colaboratorilor săi. A fost, este și va fi iubit, apreciat și admirat.

Rog îndurerata familie să primească din partea Senatului Universității, a Ministerului Educației și Învățămîntului sincere condoleanțe, exprimîndu-ne profundul nostru regret pentru pierderea suferită.

Vom păstra în mintea și inimile noastre nestinsă amintirea vieții și operi profesorului Grigore C. Moisil, exemplu luminos de dascăl savant, de slujire cu mîndrie patriotică a școlii, științei și culturii românești.

Prof. dr. GEORGE CIUCU
Rectorul Universității București

Dispariția dintre noi a A cademicianului, Profesor Grigore C. Mosil, s-a produs într-un moment cînd cu greu ne puteam gîndi la aceasta. Plin de vigoare, în plină perioadă de creație, era pentru noi toți cei care eram sub îndrumarea sa directă, un savant care ne stimula și ne îmbărbăta. La ultima sa lecție ținută în fața studenților din anul I filozofie era așa cum l-am cunoscut la prima lecție de topologie algebrică pe care a ținut-o studenților din anul IV matematică printre care mă aflam și eu. Noțiunile erau precise, bine conturate, pronunțate cu o voce puternică, nuanțată.

Avea o grijă deosebită să descopere și să protejeze elementele care promiteau. Fără a exagera, pot să afirm că multe cadre didactice din facultatea noastră de Matematică și Mecanică, mulți cercetători de la Institutul de Matematică al Academiei Republicii Socialiste România și de la Centrul de calcul al Universității din București își datorează activitatea lor Academicianului, Profesor Grigore C. Moisil. Era atît de atent cu tinerii încît le ducea primul manuscris la dactilografiere și le făcea prima corectură. Îi urmărea să se dezvolte armonios. Cînd vedea că citesc prea mult, le cerea să și scrie. Cînd vedea că scriu prea mult le cerea să mai citească. Căuta să dezvolte la fiecare inclinația pe care o aveau pentru un anumit domeniu al matematicilor. Căuta să intuiască la fiecare înclinații și pentru alte domenii ale matematicilor dîndu-le să facă referate asupra unor teme prea puțin cunoscute la noi în țară.

Făcea lecții interesante. Ținea conferințe atrăgătoare. Interesul său continuu pentru noul în matematică l-a făcut să se ocupe de teoria algebrică a mecanismelor automate care era o aplicație imediată a studiilor sale mai vechi de loigcă matematică. I s-a confirmat astfel încă o dată previziunea că orice teorie matematică oricît de abstractă ar fi are aplicații în practică și aplicațiile sînt cu atît mai practice cu cît teoria este mai abstractă. Frumusețea conferințelor sale de teoria algebrică a mecanismelor automate a făcut să

se strîngă imediat în jurul său un mănunchi de ingineri care au venit cu problemele lor spre rezolvare. După numai un an cîţiva proaspeţi absolvenţi ai facultăţii de matematică şi fizică, în acelaşi timp şi proaspeţi ingineri electronişti, au cerut Academicianului, Profesor Grigore C. Moisil să constituie un seminar ştiinţific în care să expună, ca pentru matematicieni, teoria algebrică a mecanismelor automate. În numai trei ani, în 1957, colectivul format-s-a afirmat la Moscova ca o şcoală matematică de teoria algebrică a mecanis melor automate, unde toţi cei patru invitaţi români la Conferinţa asupra teoriei algebrice a mecanismelor automate au prezentat lucrări originale. În acelaşi timp, într-un document publicat de Academia de Ştiinţe a URSS această şcoală era prezentată ca a treia din lume ca număr de lucrări după SUA şi URSS, contribuţia cea mai mare şi hotărîtoare fiind a Academicianului, Profesor Grigore C. Moisil. Faima acestei şcoli a crescut continuu, făcîndu-se remarcată şi în 1960 la Moscova cu ocazia primul Congres IFAC de automatică şi în 1962 la Moscova la Simpozionul de Automate finite şi mai ales în 1968 la Bucureşti la Simpozionul de Necontinuităţi şi nesimultaneităţi în circuitele de comutaţie în care s-a tratat o temă cu un profund specific al şcolii române de teoria algebrică a mecanismelor automate.

Apariţia calculatoarelor în tehnică, ştiinţă, viaţă socială au găsit în Academicianul, Profesor Grigore C. Moisil un neobosit militant pentru introducerea calculatoarelor în economia naţională şi mai ales pentru pregătirea cadrelor de specialitate. Seminarul său ştiinţific de teoria algebrică a mecanismelor automare a pus premisele creării în anul 1960 a secţiei de Maşini de calcul a facultăţii de matematică şi mecanică la Universitatea din Bucureşti în care s-au pregătit atît studenţii cît şi cadrele didactice care le ţineau cursurile de specialitate. Cu doi ani înainte de existenţa acestei secţii Academicianul, Profesor Grigore C. Moisil a invitat inginerii Victor Toma şi Edmond Nicolae să ţină conferinţe despre calculatoare, aceştia fiind preocupaţi pe vremea aceea de construcţia primului calculator românesc. Notiţele luate la aceste conferinţe au constituit o bază pentru cursul care s-a predat în anul următor. Acest curs a fost apoi dezvoltat şi perfecţionat pe baza bibliografiei care începea să apară.

Crearea în 1962 de către Academicianul, Profesor Grigore C. Moisil e a Centrului de calcul al Universităţii din Bucureşti a fost o consecinţă firească a grijii pentru a asigura studenţilor secţiei de Maşini de calcul a unei activităţi practice la un calculator electronic. La început a fost folosit calculatorul CIFA — 3 de construcţie românească. Multă experienţă a fost acumulată cu această ocazie. Apoi a fost organizată în 1967 o expoziţie cu calculatorul polonez Odra mult mai evoluat. În 1968 Academicianul, Profesor Grigore C. Moisil a depus o deosebită stăruinţă pentru deschiderea unei expoziţii la Centrul de calcul al Universităţii în care să fie expus calculatorul IBM 360/30 la care s-a făcut o practică efectivă în cadrul şcolii de vară organizată cu instructori străini la Centrul de calcul al Universităţii. Acest calculator a depăşit cu mult perioada expoziţiei şi acum continuă să fie un instrument de bază pentru practica tuturor studenţilor facultăţii de matematică şi mecanică dintre care cei mai mulţi învaţă cu sîrg să programeze probleme din cele mai variate.

A avut grijă de specializarea cadrelor didactice cu specialitatea în calculatoare, Le-a asigurat locuri de specializare în URSS, Anglia, Franța, RFG, SUA. Datorită lui avem acum cadre de nădejde în majoritatea centrelor de calcul din România și în institute de învățămînt. Tot datorită lui avem astăzi conducători de doctorate în domeniul calculatoarelor electronice, a programării lor, a utilizării lor în economia națională.

Pentru învățămîntul matematic, pentru creația matematică, pentru cultura din țara noastră, plecarea dintre noi a Academicianului, Profesor Grigore C. Moisil este o grea pierdere. Ne legăm să, păstrăm neîntinată și cu cinste calitatea de a fi fost elevi ai Academicianului, Profesor Grigore C.Moisil să facem totul pentru ca tot ce a sădit în solul științei românești să dea roade mereu mai bogate.

Prof. dr. **Constantin P. Popovici**